1 , (a) 普通に分配関数を計算してください。$N = \sum_a N_a$ として、

$$Z = (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3N} \prod_a \frac{1}{N_a!}(exp(-\beta N_a \varepsilon_a)(\prod_i \int dr_{a,i} \int dp_{a,i} exp(-\frac{1}{2m}\beta p_{a,i}^2)))$$

$$= (\frac{1}{2\pi\hbar})^{3N} V^N \prod_a (\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}})^{3N_a} \frac{1}{N_a!} \exp(\beta \varepsilon_a N_a)$$

(ii) 圧力を計算する。

$$P = -\frac{\partial F}{\partial V}$$

$$= -\frac{\partial(-k_b T \ln Z)}{\partial V}$$

$$= \frac{k_b T N}{V}$$

化学ポテンシャルを計算する。

$$\mu_a = \frac{\partial F}{\partial N_a}$$

$$\mu_a = \frac{\partial(-k_b T \ln Z)}{\partial N_a}$$

$$= \varepsilon_a - k_b T \ln \frac{V}{N_a}(\frac{1}{2\pi\hbar})^3(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}})^3$$

$$= \varepsilon_a - k_b T \ln \frac{V}{N_a}(\frac{1}{2\pi\hbar})^3(\sqrt{\frac{2m\pi}{\beta}})^3$$

(b) 自由エネルギーが極小と成る条件から

$$0 = \frac{\partial F}{\partial N_a} dN_a + \frac{\partial F}{\partial N_b} dN_b$$

$N_a = N(1-x)N_b = 2xN$ より

$$0 = -\frac{\partial F}{\partial N_a} N dx + \frac{\partial F}{\partial N_b} N 2dx$$

で

$$K = 4exp(\beta(2\varepsilon_b - \varepsilon_a))(2\pi\hbar)^3 \sqrt{(\frac{\beta}{2m\pi})^3}$$

2 (a) ε はどうみても粒子の運動エネルギーの部分である。周期境界条件をつかって、１次元の L の長さの箱のなかで運動をする粒子の取りうる波数を考える。$k = \frac{\pi}{L} n$ なので

$$\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$= \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}$$

(b) (i)

$$Z = \sum_{n,\sigma} \exp(-\beta(\varepsilon n^2 - \mu B\sigma))$$

$\beta\varepsilon << 1$ より、n についてのシグマを積分に書き換える。

$$\frac{L}{\pi} \sum_{\sigma} \int \exp(-\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu B\sigma))dk$$

$$\frac{L}{\pi}(\exp(\beta\mu B) + \exp(-\beta\mu B)) \int \exp(-\beta(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}))dk$$

古典近似やるんかな‥ まぁ一致しますが。

(ii) $\beta\varepsilon >> 1$ より n について n=1 以外の寄与はムシする。

$$Z \simeq \frac{L}{\pi} \sum \sigma \exp(-\beta(\varepsilon - \mu B\sigma))$$

$$= \frac{L}{\pi} \exp(-\beta\varepsilon)(exp(-\beta\mu B) + (exp(\beta\mu B))$$

よって

$$P_g = \frac{\frac{L}{\pi} \exp(-\beta(\varepsilon - \mu B))}{Z}$$

$$P_g = \frac{\exp(\beta\mu B))}{exp(-\beta\mu B) + (exp(\beta\mu B)}$$

$$P_e = \frac{\frac{L}{\pi} \exp(-\beta(\varepsilon + \mu B))}{Z}$$

$$P_e = \frac{\exp(-\beta\mu B))}{exp(-\beta\mu B) + (exp(\beta\mu B)}$$

(iii)

$$< \sigma > = \frac{\exp(\beta\mu B)) - \exp(-\beta\mu B))}{exp(-\beta\mu B) + (exp(\beta\mu B)}$$

家かえって gnuplot

(c) (i) まぁ、普通は $\beta\varepsilon >> \mu B$ なので、第一励起状態は

$$(n_1, \sigma_2, n_2, \sigma_2) = (1, 1, 1, -1), (1, -1, 1, 1)$$

$$E_e = 2\varepsilon$$

基底状態は

$(n_1, \sigma_2, n_2, \sigma_2) = (1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$

$$E_g = 2\varepsilon - 2\mu B$$

(ii) 2粒子系の分配関数を考える。だが、今回の場合スピンだけ考えればいいので、スピン部分のみ考える。

$$Z = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} exp(-\beta\mu B(\sigma_1 + \sigma_2))$$
$$= exp(-2\beta\mu B) + exp(2\beta\mu B) + 2$$
$$< \sigma_1 + \sigma_2 >= \frac{-2exp(-2\beta\mu B) + 2exp(2\beta\mu B)}{exp(-2\beta\mu B) + exp(2\beta\mu B) + 2}$$
$$= 2 < \sigma >$$

3 (a)$x_1 + x_2 < 2x$ となる領域の体積を求める。

これは $2x^2$

それを微分すれば $x_1 + x_2 = 2x$ となる領域の密度で、こ $4x$ れは。さらに、また、この領域の任意の状態をとる確率は

$$a^2 \exp(-2ax)$$

なのでこいつをかけてやればよい。答えは

$$P = 4a^2 x \exp(-2ax)$$

(b)(a) とまったく同じようにする。$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < Nx$ となる領域の体積は

$\frac{(nx)^n}{n!}$

それを x で微分すれば $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = Nx$ をとる状態の密度で

$n\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!}$

この領域の任意の状態をとる確率は

$$a^n \exp(-nax)$$

なのでこれをかけてやって

$$P = \frac{a^n (nx)^n}{(n-1)!} \exp(-nax)$$