

数理手法 II

河村哲也教員

2008/02/05

1. 次の偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sqrt{-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

を近似する，役に立つ（無条件不安定でない）差分方程式をひとつ挙げ，その安定条件を求めよ．*1

2. ポアソン方程式の境界値問題

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 2(x+y) \quad (0 < x < 3, 0 < y < 3) \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(x, 3) = 3x(x+3) \\ u(0, y) &= 0, \quad u(3, y) = 3y(y+3) \end{aligned}$$

を， 3×3 の等間隔格子に分割して差分法を用いて解き，各格子点での近似値を求めよ．また厳密解 $u(x, y) = xy(x+y)$ と近似解を比較し，一致，不一致の理由を述べよ．

3. 次の偏微分方程式の初期値・境界値問題を解け．

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \quad (0 < x < \pi, t > 0) \\ u(x, 0) &= \sin 2x - 4 \sin 4x \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0 \end{aligned}$$

*1 ヒント： $u_j^n = G^n e^{\sqrt{-1} \xi_j \Delta x}$ とおく．