

数学 1D

求幸年教員

2008/03/03

1. 以下の微分方程式を解け. ただし, $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ とする.

(a) $y' + y \tan x = 0$

(b) $xy' - 3y = 4x$

(c) $3y'' + 7y' + 2y = e^x$

(d) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

(e) $2y'' + xy' + y = 0$ ($x = 0$ の周りの級数解を求めよ)

2. 3次元空間内の点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ におけるスカラー場 ϕ が, ある定数 n を用いて

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{r^{2(n+1)}}{2(n+1)} (n \neq -1)$$

の形で与えられる場合について以下の問いに答えよ. ただし $r = |\mathbf{r}|$ とする.

(a) $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ で与えられるベクトル場 \mathbf{E} を求めよ.

(b) 前問で求めた \mathbf{E} について, $\nabla \cdot \mathbf{E}$ および $\nabla \times \mathbf{E}$ を計算せよ.

(c) ある与えられた体積中での積分 $\iiint E^2 dx dy dz$ を最小にする条件は $\Delta\phi = 0$ で与えられる事を示せ.

(d) 前問の条件を満たす ϕ について $\iiint \Delta\phi dx dy dz$ を求めよ.

3. ある曲面上を初速ゼロで点 A から点 B まで摩擦なく滑り降りる質点を考える. 点 A, B を通る断面に xy 平面をとり, 鉛直下向きを x 軸の正の方向とし, 点 A, B の座標をそれぞれ $(0, 0)$, (x_0, y_0) とする ($x_0 > 0$). 重力定数は g とする. 以下の問いに答えよ.

(a) エネルギー保存則を用いて, 質点の速度 v を x を用いて表せ.

(b) 点 A から点 B まで降下するのに要する時間を x に関する積分で表せ.

(c) 変分法を用いて前問の所要時間の停留条件を求めよ.

(d) 前問で求めた停留条件を用いて所要時間の最小値を求めよ. その結果と, 2点 A, B を結ぶ直線上を滑り降りる場合の所要時間との比を求めよ.