数学 2D

藤堂眞治教員

2007/07/20

- 参考書・ノート類の持ち込み不可.
- 解答用紙 3 枚, 計算用紙 1 枚. 原則として各問につき 1 枚の解答用紙を用いること. (裏面を用いてもよい) それぞれの解答用紙に学生証番号・氏名・問題番号を明記せよ.
- 問題の設定が不十分または不適当と思う場合は, その旨を明記し合理的な設定をした上で解答せよ.

1.
$$f(z) = \frac{z^3}{(z-1)(z+2)}$$
について以下の問いに答えよ.
(a) $[f(-1)]^{1/4}$ の値をすべて求めよ. (必要であれば, $(1.19)^4 \approx 2$ を用いよ.)
(b) Cauchy-Riemann の関係式を用いて, $f(z)$ が原点 $(z=0)$ とその近傍で正則であることを示せ.
(c) $f(z)$ の全ての特異点を求めよ. さらに特異点が極である場合にはそのそれぞれの位数と留数を求めよ.
(d) (c) で求めた特異点を原点から近い順に $z_1, z_2, \cdots$ とするとき, 領域 $|z| < |z_1|$ で収束する Taylor 展開を求めよ.
(e) 値域 $|z_1| < |z| < |z_2|$ で収束する Laurant 展開を求めよ.

2. (a) $|z| \to \infty$ のとき一様に $|g(z)| \to 0$ であるならば, 下に示す半円 C 上の複素積分 $I_R = \int_C g(z) e^{iaz} dz (a > 0)$ が $R \to \infty$ で 0 となることを証明せよ.

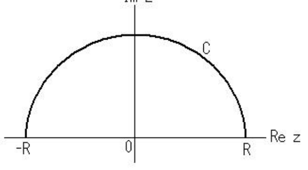

図 1

(b) 以下の積分を複素積分を用いて求めよ. 積分路など計算の詳細も示せ.
i. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} - \cos\theta}$
ii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+ibx} dx (a > 0)$
iii. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$

iv. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - ix}$ (Cauchy の主値を求めよ)

3. (a) 以下の関数の Fourier 変換を求めよ. ただし, $u(x)$ の Fourier 変換を $\hat{u}(k), a > 0$ とする.

 i. $\delta(x-a)$

 ii. $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

 iii. e^{-ax^2}

 iv. $\dfrac{\sin ax}{x}$

 v. $\dfrac{d}{dx}u(x)$

 vi. $u(x+a)$

(b) 2 次元 Laplace 方程式

$$\nabla^2\Phi(x,y) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = 0(0 \le x \le a, 0 \le y \le b)$$

を境界条件 $\Phi(x,0) = \Phi(0,y) = \Phi(a,y) = \Phi(x,b) = h(x)$ のもとで解くことを考える.

 i. 変数分離型の解 $\Phi(x,y) = X(x)Y(y)$ を仮定し, $X(x)$ と $Y(y)$ それぞれに関する微分方程式を求めよ.

 ii. $X(x)$ に関する境界値問題を解き, 全ての固有値と固有関数を求めよ.

 iii. 前問で得られた固有値を代入して $Y(y)$ に関する微分方程式を解き, 境界条件 $\Phi(x,0) = \Phi(0,y) = \Phi(a,y) = 0$ を満たす一般解が, 定数 $C_n(n = 1, 2, \cdots)$ を用いて

$$\Phi(x,y) = X(x)Y(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

と表わされることを示せ. ($X_n(x)$ は前問で n 番目に小さな固有値に対応する固有関数とする)

 iv. $h(x)$ の Fourier 級数展開を考えることにより, 係数 C_n を $h(x)$ を含む積分の形で求めよ.