

確率数理工学*

以下の問に全て答えること。解答用紙が二枚にわたるときには、混乱のないように名前などを全て書き、また 1/2, 2/2 と明示しておくこと。

1. (a) 整数値を取る確率変数 X の特性関数を $\phi(t) = E(e^{itX})$ とおく。反転公式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \phi(t) dt$$

を証明せよ。

- (b) ± 1 を確率 $1/2$ で取る確率変数 X を考える。すなわち、 $1/2 = P(X = -1) = P(X = 1)$ とする。 X の特性関数が $\cos t$ となることを示せ。

- (c) X_1, \dots, X_n を独立に前項の分布に従う確率変数とし、 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ とおく。 S_n はランダムウォークと呼ばれるがその解釈を説明せよ。また S_n の特性関数を求めよ。

- (d) n が偶数として、 $P(S_n = 0)$ の確率を 2 通り求めることにより、

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t)^n dt = \binom{n}{n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

となることを示せ。

2. 確率ベクトルの 1 対 1 の滑らかな変換 $y = g(x)$ にともなう確率密度の変換公式

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \det \frac{\partial x}{\partial y} \right|$$

を説明せよ。

3. U, V を互いに独立に 0 と 1 の間の一様分布 $U[0, 1]$ に従う確率変数とする。 $X = -\log(U), Y = \log(U) - \log(V)$ とおく。

- (a) X の密度関数が $f(x) = e^{-x}, x > 0$ で与えられることを示せ。

- (b) (X, Y) の同時密度関数を求めよ。ただし前問を用いてよい。

- (c) $E(Y), \text{Var}(Y)$ を求めよ。

- (d) Y を与えたときの X の条件付分布、条件付期待値 $E(X|Y)$ 、条件付分散 $\text{Var}(X|Y)$ を求めよ。

4. 次のようなすごろくを考える。

- 原点から出発する。
- さいころを投げて 5 以下の目が出れば、その目の数だけ右に進むとする。
- 6 が出たときは原点に戻されるとする。

時刻 n での位置を X_n とおく。

* 2005 年度。

- (a) X_n をマルコフ連鎖と考えると、推移確率 $p_{ij}, i, j \geq 0$ を示せ。ただし p_{ij} は i から j へ移る確率である。
- (b) 2 ステップの推移確率を示せ。
- (c) 全ての状態は相互に到達可能であることを示せ。
- (d) 原点が再帰的であることを示せ。ただしある状態が再帰的とはその状態から出発したマルコフ連鎖が、確率 1 でその状態に戻ってくることをいう。
- (e) 状態空間 (本問では非負整数) 上の確率分布で $\pi_i = \sum_j \pi_j p_{ji}, \forall i$ を満たすものを定常分布というが、その意味を説明せよ。本問で π_0, π_1, π_2 の値を求め解釈を述べよ。
- (f) ”マルコフ連鎖の全ての状態が相互に到達可能で、ある状態が再帰的ならば、全ての状態は再帰的である” という結果の証明の概略を説明せよ。