解析数理工学

山本教員

1997/09/09

次の問に答えよ．ただし，実数空間 $(-\infty, \infty)$ を $\mathbf{R}$ で，複素数空間を $\mathbf{C}$ で表す．式を変形するときは，自明な場合を除いて，その変形が成立する理由を必ず説明すること．

1. ヒルベルト空間に関する次の問に答えよ．
   (a) ヒルベルト空間とは，どのような性質を満たす空間かを詳しく説明せよ．
   (b) ある測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ 上で p 乗可積分な関数全体の空間を L_p とすると，L_2 はヒルベルト空間となる．しかし，$p \neq 2$ の場合は，一般には L_p はヒルベルト空間とはならないが，これは上記 (a) で述べたどの性質を満たさないためか．
   (c) $a_j \in C$ である無限次元ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots)$ のうち，$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ を満たすベクトル空間を $l_2 = \{\boldsymbol{a} : \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty\}$ とする．このとき L_2 と l_2 の間にどのような関係が成立するかについて，フーリエ級数を用いて説明せよ．
2. $f(t), h(t)$ を区間 $[a, b]$ で連続な関数とし，$f(h)$ と $g(h)$ の畳み込みを
$$g(s) = \int_a^b h(s-t) f(t) dt$$
で定義する．$\displaystyle\max_{a \le t \le b} |h(t)| \le \frac{1}{b-a}$ のとき，$f(s) + g(s) + h(s) = 0$ を満たす関数が存在するか否かを示し，その理由を述べよ．
3. ノルム空間 A から A への有界線形作用素 T が，任意の $f \in A$ に対して，ある有界な $m > 0$ で $\|Tf\| \ge m\|f\|$ を満たす．このとき，次の問に答えよ．
   (a) T の値域 $R(T)$ から T の定義域 $D(T)$ への逆作用素 T^{-1} が存在することを示せ．
   (b) 逆作用素 T^{-1} が有界で，$\|T^{-1}\| \le \dfrac{1}{m}$ であることを示せ．
4. ヒルベルト空間 H 上の有界線形作用素 T に対して，任意の $f, g \in H$ で $(Tf, g) = (f, T^*g)$ を満たす作用素 T^* を T の共役作用素というが，
$$\|T\| = \|T^*\|$$
であることを示せ．

5. (a) ヒルベルト空間上の汎関数に関する Riesz の表現定理がどのような内容であるかについて説明せよ.

   (b) ヒルベルト空間 H 上の有界線形汎関数 $F(f) : H \to \mathbf{C}$ に対して, 列 $\{f_n\}, (f_n \in H)$ が $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_0\| = 0$ を満たすとき, $\lim_{n\to\infty} F(f_n) = F(f_0)$ が成立することを, Riesz の表現定理を利用して証明せよ.

6. (a) $(-\pi, \pi)$ で可積分な関数 $f(x)$ に対する複素フーリエ級致 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{i\omega t}, c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-i\omega t}$ が収束するためのデイニ (Dini) の判定条件とはどのような条件であるかを説明せよ.

   (b) $f(x)$ がある定数 $C, \alpha > 0$ および $\delta > 0$ に対して $|h| < \delta$ の範囲で,

$$|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq C|h|^{\alpha}$$

   を満たしているとき, $f(x)$ の複素フーリエ級数が $f(x)$ に収束することを, ディニの判定条件を利用して証明せよ.

7. $\mathbf{R}$ 上で可積分な関数 $f(t)$ と, ある有界な定数 $K > 0$ と $m > 0$ に対して $\mathbf{R}$ 上で $|g(t)| \leq K, g(t) = -g(t+m)$ を満たす関数 $g(t)$ を用いて, 関数 $h(u)$ を次式で定義する.

$$h(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(ut)dt$$

   このとき, 次の問に答えよ.

   (a) $\|h(u)\|_{\infty} \leq K\|f\|_1$ であることを示せ.

   (b) $h(u)$ は $\mathbf{R}$ 上の連続関数であることを示せ.

   (c) $\lim_{u\to\infty} h(u) = 0$ であることを示せ.