3．$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

とおくと、

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

$$2xy' = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n$$

となるので、

$$\sum_{n=0}^{\infty}\{(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2\alpha a_n\}x^n = 0$$

よって

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - 2na_n + 2\alpha a_n = 0$$

から、

$$a_{n+2} = \frac{2(n-\alpha)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

よって、a_n の一般項は、

$$a_n = \begin{cases} \frac{2(n-2-\alpha)}{n(n-1)} \cdot \frac{2(n-4-\alpha)}{(n-2)(n-3)} \cdots \frac{(2-\alpha)}{2\cdot 1}a_0 = \frac{2^{\frac{n}{2}}(n-2-\alpha)(n-4-\alpha)\cdots(2-\alpha)(-\alpha)}{n!}a_0 & (n : even) \\ \frac{2(n-2-\alpha)}{n(n-1)} \cdot \frac{2(n-4-\alpha)}{(n-2)(n-3)} \cdots \frac{(1-\alpha)}{3\cdot 2}a_1 = \frac{2^{\frac{n}{2}}(n-2-\alpha)(n-4-\alpha)\cdots(3-\alpha)(1-\alpha)}{n!}a_1 & (n : odd) \end{cases}$$

よって一般解は、

$$y = a_0\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m(2m-2-\alpha)(2m-4-\alpha)\cdots(2-\alpha)(-\alpha)}{(2m)!}x^{2m}\right)$$
$$+ a_1\left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m(2m-2-\alpha)(2m-4-\alpha)\cdots(3-\alpha)(1-\alpha)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right)$$

次に、$e^{-(1-\epsilon)x^2}y$ が $x \to \pm\infty$ で発散しない条件を考える。
ここで e^{x^2} のべき級数展開を考えると、

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots \qquad (e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots \text{の } x \text{ に } x^2 \text{を代入})$$

x^n の係数を b_n とおくと、

$$b_n = \frac{1}{(\frac{n}{2})!}(n : even)$$

まず a_n, b_n の $n \to \infty$ での様子を調べる。

$$\frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{2}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{2(n-\alpha)}{(n+2)(n+1)}$$

なので、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}}{a_n}$$

よって、$n\to\infty$ で $a_n x^n$ と $b_n x^n$ は同じオーダーとなり、$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ と $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n=e^{x^2}$ は同程度に発散する。（この辺がちょっと曖昧で何となくこんな感じということしかわかりません・・・）

つまり、$e^{-(1-\epsilon)x^2}y$ は $e^{\epsilon x^2}$ と同程度に発散してしまう。($\epsilon>0$)

よって、↑が収束するためには、y は有限次数の多項式になる必要がある。つまりある N から先で $a_n=0$ となればよい。

a_n の一般項より、α が 0 以上の偶数のとき、$a_{\alpha+2}=\cdots=0$ となり、$n>\alpha$ では $a_n=0(n:even)$ となる。このとき、$a_n(n:odd)\neq 0$ だが、$a_1=0$ とすれば y は α 次の多項式となり、

$$\lim_{n\to\infty}x^n e^{-(1-\epsilon)x^2}=0$$

なので、このとき

$$\lim_{n\to\infty}e^{-(1-\epsilon)x^2}y=0$$

同様にして、α が 1 以上の奇数で、$a_n=0$ ならば y は α 次の多項式となり、

$$\lim_{n\to\infty}e^{-(1-\epsilon)x^2}y=0$$

以上より、αが自然数になることが必要。