数値解析

大石泰章教員

2006/03/01

1. 次の事項について, それぞれ 150 字程度で説明せよ.
   (a) Euler-Maclaurin の総和公式
   (b) A 安定性
2. (a) 定積分 $I = \int_b^a f(x)dx$ の数値計算法の 1 つである複合 Simpson 則は, $h = (b-a)/N$ として,

$$S_{\frac{h}{2}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{3}\frac{h}{2}[f(a+nh) + 4f(a+(n+\frac{1}{2})h) + f(a+(n+a)h)]$$

   と表される. これは複合台形則

$$T_h = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{h}{2}[f(a+nh) + f(a+(n+1)h)]$$

   を 1 回 Richardson 加速したもの $T_{\frac{h}{2}}^{(1)}$ に等しいことを示せ.

   (b) 定積分 $I = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)}dx$ の値を, 複合 Simpson 則で数値計算する. $h = 1, h = \frac{1}{2}$ の場合における $S_{\frac{h}{2}}$ の値を電卓を使って計算せよ.

   (c) 離散化誤差 $S_{\frac{1}{4}} - I$ の値を, I の値を使わずに $S_{\frac{1}{2}}, S_{\frac{1}{4}}$ の値を使って推定するにはどうしたらよいかを, Eular-Maclaurin の総和公式

$$T_h - I = \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) - \frac{h^4}{720}(f'''(b) - f'''(a)) + \cdots$$

   に基づいて述べよ. また, 前問の場合における $S_{\frac{1}{4}} - I$ の値を, 先に述べた推定方法で電卓を使って推定せよ. さらに, 推定した結果を前問の場合における $S_{\frac{1}{4}} - I$ の真の値と比較し, 推定の精度について論ぜよ. ただし, 前問の場合 $I = \ln 2$(ln は自然対数を表す) である.

3. 常微分方程式の初期値問題 $\frac{dy}{dx} = f(x,y), y(a) = y_0$ の数値解法の 1 つである Heun 法は, $h = (b-a)/N, x_n = a + nh$ として, $n = 1, 2, \cdots, N-1$ に関して

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n + h, y_n + hk_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

   と表される.
   (a) Heun 法が 2 段 2 次の陽的 Runge-Kutta 法であることを説明せよ.

(b) Heun 法を線形テスト問題 $\dfrac{dy}{dx} = \lambda y (\lambda < 0)$ に適用するとき, ある関数 $R(\bar{h})$ に関して

$$y_{n+1} = R(\lambda h) y_n (n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

が成り立つ. 関数 $R(\bar{h})$ の具体形を求めよ (安定性因子).

(c) 予測子として Eular 法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)(n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

修正子として 1 段階 2 次の Adams-Moulton 公式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_{n+1}, y_{n+1}) + f(x_n, y_n)](n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

を使うときの予測子修正子法は, PECE モードのとき Heun 法に一致する. このことを示せ.