数学 2D

宮下精二教員

2002/07/19

問題 1. を 1 枚目, 問題 2., 3., 4. を 2 枚目, 問題 5., 6., 7. を 3 枚目の解答用紙に解答せよ. 問題の設定が不十分または不適当と思う場合は, その旨を明記して合理的な設定を行って解答せよ.

1. 次の積分を実行せよ.
   (a) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{z}{z^2+1} dz$
   (b) $\displaystyle\oint \frac{e^2 z}{(z-1)^2} dz$
   (c) $\displaystyle\oint_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$
   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{inx}}{x^2-k^2} dx (a>0, k>0)$
2. (a) 周期関数 (周期 2π)
   $$f(x) = \begin{cases} 1 & (-\pi < x < 0) \\ 0 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$
   を Fourier 級数展開せよ.
   (b) $g(x) = e^{-\lambda x^2}$ を Fourier 変換せよ ($\lambda > 0$). ただし, 以下の式を用いてよい.
   $$\int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$
3. 上の問題の $f(x)$ を Laplace 変換せよ.
4. $$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = A\cos\omega_0 t,\ y(0)=0, y'(0)=0$$
   を Laplace 変換を用いて解け. ただし, 以下の式を使ってよい.
   $$\mathcal{L}[\cos\alpha t] = \frac{s}{s^2+\alpha^2},\ \mathcal{L}[\frac{d^2}{dt^2} y] = -y'(0) - sy(0) + s^2\mathcal{L}[y],\ \mathcal{L}[t\sin\alpha t] = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$$
5. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \kappa \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ の解 ($\kappa > 0$) を, 初期条件 $u(x, t=0) = \delta(x - x_0)$ の場合に求めよ. ただし,
   $$u(L,t) = u(-L,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(-L,t)$$
   の境界条件で, $L \to \infty$ の極限で考えよ.

6. 次の方程式の根 z を求めよ.

$$\sin z = \sqrt{3}$$

7. 次の級数の収束半径を求めよ.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n}$$