平成19年度 幾何数理 期末試験

(増田 直紀, 2008年2月14日)

1. 複体

$$K \equiv \{|p_0p_1|, |p_1p_2|, |p_2p_0|, |p_0|, |p_1|, |p_2|\} \tag{1}$$

を考える。

(a) 0次元サイクル群 $Z_0(K)$ が0次元鎖群

$$C_0(K) = \{\alpha_0 \langle p_0 \rangle + \alpha_1 \langle p_1 \rangle + \alpha_2 \langle p_2 \rangle : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{Z}\}$$

と等しいことを示せ (言葉による説明のみでもよい)。

(b) 1次元鎖 $c \in C_1(K)$ に対して $\partial_1(c)$ を計算することにより、0次元境界サイクル群 $B_0(K)$ は

$$B_0(K) = \{l_0 (\langle p_0 \rangle - \langle p_2 \rangle) + l_1 (\langle p_1 \rangle - \langle p_2 \rangle) : l_0, l_1 \in \mathbf{Z}\}.$$

と表せることを示せ。

(c) 前小問の結果より、$B_0(K)$ の要素は $\langle p_0 \rangle - \langle p_2 \rangle$ と $\langle p_1 \rangle - \langle p_2 \rangle$ を基底として表せる。このことを利用して、$c \in Z_0(K)$ は

$$c = m \langle p_2 \rangle + \alpha \quad (m \in \mathbf{Z}, \alpha \in B_0(K))$$

と表せることを示せ。

(d) $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) \simeq \mathbf{Z}$ を示せ。(同型写像 $\varphi : H_0(K) \to \mathbf{Z}$ を1つ挙げればよい)。

(e) $H_1(K) \simeq \mathbf{Z}$ を示せ。

2. 図1に示すメビウスの帯の、オイラー標数について考える。

(a) メビウスの帯と同型な複体 K の中で、単体分割すると頂点 (0次元単体) の数が6個になる単体分割の1例を、図示するとともに、式 (1) のような形で書き下せ。

(b) メビウスの帯のオイラー標数 $\chi(K)$ を、オイラー＝ポアンカレの定理:

$$\chi(K) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \beta_q.$$

(β_q は、n 次元複体 K に含まれる q 次元単体の個数) を用いて求めよ。

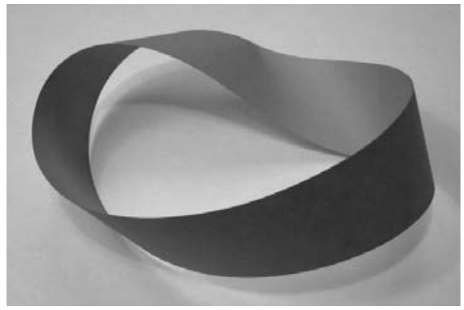


Figure 1: メビウスの帯 (Wikipedia より引用)

(c) メビウスの帯について $H_0(K) \simeq \mathbf{Z}$ を示せ。

(d) メビウスの帯について $H_1(K) \simeq \mathbf{Z}$ を示せ。

(e) メビウスの帯について $H_2(K) \simeq \{0\}$ (自明群) を示せ。

(f) $R_q(K)$ を K の q 次元ベッチ数とする。直前 3 小問の結果と、オイラー標数の定義

$$\chi(K) := \sum_{q=0}^{n} (-1)^q R_q(K)$$

から $\chi(K)$ を求めよ。オイラー＝ポアンカレの定理から求めた $\chi(K)$ と一致するはずである。

3. 3 次元アフィン空間における Eddington の ϵ

$$\begin{cases} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1, & (i,j,k) \text{ が偶置換} \\ \epsilon_{132} = \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1, & (i,j,k) \text{ が奇置換} \\ \epsilon_{\kappa\lambda\mu} = 0. & \text{それ以外} \end{cases}$$

について、以下を示せ。

(a) $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\nu\rho} = \delta^\lambda_\nu \delta^\mu_\rho - \delta^\lambda_\rho \delta^\mu_\nu.$

(b) $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\lambda\nu} = 2\delta^\mu_\nu.$

(c) $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\lambda\mu} = 6.$

ただし

$$\delta^\kappa_\lambda = \begin{cases} 1, & (\kappa = \lambda) \\ 0. & (\kappa \neq \lambda) \end{cases}$$

4. 3次元アフィン空間において、基底ベクトル $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ と $\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ の関係が

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2 + 2\mathbf{e}'_3,\\ \mathbf{e}_2 &= 3\mathbf{e}'_2 + 2\mathbf{e}'_3,\\ \mathbf{e}_3 &= 3\mathbf{e}'_1 + 4\mathbf{e}'_2 + 4\mathbf{e}'_3,\end{aligned}$$

で与えられるとする。このとき

(a) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関して次の成分をもつ反変ベクトル (v^λ) と共変ベクトル (w_λ) の、$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ に関する成分をそれぞれ求めよ。

$$(v^\lambda) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad (w_\lambda) = (2, 1, 2).$$

(b) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ に関する成分が

$$(T^\lambda_\mu) = \begin{pmatrix} T^1_1 & T^1_2 & T^1_3 \\ T^2_1 & T^2_2 & T^2_3 \\ T^3_1 & T^3_2 & T^3_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である反変1価共変1価のテンソル (T^λ_μ) の、$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ に関する成分を求めよ。

(c) 空間に内積が与えられいて、$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ は正規直交基底 ($|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = |\mathbf{e}_3| = 1$, $\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = 0$, $i \neq j$) とする。このとき、$\{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ に関する計量テンソルの成分 $g'_{\lambda\mu}$ を求めよ。

5. 交代共変テンソル $S \in \overset{p}{\wedge} V^*$ と $T \in \overset{q}{\wedge} V^*$ の外積

$$S \wedge T := \frac{(p+q)!}{p!q!}\mathrm{Alt}(S \otimes T) \quad \in \overset{p+q}{\wedge} V^*$$

を考える。ただし、任意の非負整数 r に対して

$$\mathrm{Alt}(U) := \frac{1}{r!}\sum_{\sigma \in S_r} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma U. \quad U \in \overset{r}{\otimes} V^*$$

(a) n 次元ベクトル空間 V の共変ベクトル $\mathbf{w}_1, \cdots, \mathbf{w}_p \in \overset{1}{\wedge} V^* = V^*$ $(p \leq n)$ と反変ベクトル $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p \in V$ に対して

$$(\mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_p)(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_p) = \begin{vmatrix} \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_p) \\ \mathbf{w}_2(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_2(\mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{w}_2(\mathbf{v}_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{w}_p(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_p(\mathbf{v}_2) & \cdots & \mathbf{w}_p(\mathbf{v}_p) \end{vmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \det\left(\mathbf{w}_{\kappa}\left(\mathbf{v}_{\lambda}\right)\right) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)}) \cdots \mathbf{w}_p(\mathbf{v}_{\sigma(p)}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma) \mathbf{w}_{\sigma(1)}(\mathbf{v}_1) \cdots \mathbf{w}_{\sigma(p)}(\mathbf{v}_p) \qquad (2)
\end{aligned}
$$

が成り立つことが知られている。これの $p=3$ の場合:

$$
(\mathbf{w}_1 \wedge \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{w}_3)(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_2) & \mathbf{w}_1(\mathbf{v}_3) \\ \mathbf{w}_2(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_2(\mathbf{v}_2) & \mathbf{w}_2(\mathbf{v}_3) \\ \mathbf{w}_3(\mathbf{v}_1) & \mathbf{w}_3(\mathbf{v}_2) & \mathbf{w}_3(\mathbf{v}_3) \end{vmatrix}
$$

を示せ。

(b) 式 (2) を既知として、任意の置換 $\sigma \in S_p$ に対して

$$
\mathbf{w}_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_{\sigma(p)} = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \mathbf{w}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{w}_p
$$

を示せ。

(c) 例えば $S \in \bigwedge^p V^*$ がその基底を用いて

$$
S = \sum_{1 \leq \kappa_1 < \cdots < \kappa_p \leq n} S_{\kappa_1 \cdots \kappa_p} \mathbf{e}^{\kappa_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\kappa_p}
$$

と表されることを用いて、

$$
S \wedge T = (-1)^{pq} T \wedge S
$$

を示せ。

期末試験略解

1. (a)

$$Z_0(K) = \mathrm{Ker}(\partial_0) = \{c \in C_0(K) : \partial_0(c) = 0\}.$$

定義として $\partial_0 \langle p_i \rangle = 0, \forall i$ なので、

$$\forall c \in C_0(K), \quad \partial_0(c) = 0.$$

$$\Downarrow$$

$$Z_0(K) = C_0(K).$$

(b) $c \in C_1(K)$ に対して

$$\begin{aligned} \partial_1(c) &= \partial_1 \left(\alpha_0 \langle p_0 p_1 \rangle + \alpha_1 \langle p_1 p_2 \rangle + \alpha_2 \langle p_2 p_0 \rangle\right) \\ &= l_0 \left(\langle p_0 \rangle - \langle p_2 \rangle\right) + l_1 \left(\langle p_1 \rangle - \langle p_2 \rangle\right), \end{aligned} \tag{3}$$

where

$$l_0 \equiv \alpha_2 - \alpha_0, \quad l_1 = \alpha_0 - \alpha_1.$$

$$\Downarrow$$

$$B_0(K) = \mathrm{Im}(\partial_1) = l_0 \left(\langle p_0 \rangle - \langle p_2 \rangle\right) + l_1 \left(\langle p_1 \rangle - \langle p_2 \rangle\right). \quad (l_0, l_1 \in \mathbf{Z})$$

(c) $c \in Z_0(K)(= C_0(K))$ に対して

$$\begin{aligned} c &= \alpha_0 \langle p_0 \rangle + \alpha_1 \langle p_1 \rangle + \alpha_2 \langle p_2 \rangle \\ &= \underbrace{\alpha_0 \left(\langle p_0 \rangle - \langle p_2 \rangle\right) + \alpha_1 \left(\langle p_1 \rangle - \langle p_2 \rangle\right)}_{\in B_0(K)} + \underbrace{\left(\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2\right)}_{\equiv m \in \mathbf{Z}} \langle p_2 \rangle . \end{aligned}$$

(d)

$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = \{m \langle p_2 \rangle + B_0(K) : m \in \mathbf{Z}\}$$

なので

$$\varphi : H_0(K) \to \mathbf{Z}, \quad \varphi\left(m \langle p_2 \rangle + B_0(K)\right) := m$$

とすればよい。

(e) 2 次元単体はないので $B_1(K) = \{0\}$. また、式 (3) で $\partial_1(c) = 0$ とすると $l_0 = 0$, $l_1 = 0 \Longrightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2$ となるので

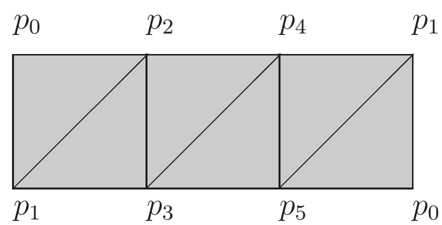
$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K) = Z_1(K) = \{\alpha\left(\langle p_0p_1\rangle + \langle p_1p_2\rangle + \langle p_2p_0\rangle\right) : \alpha \in \mathbf{Z}\}.$$

$$\varphi : H_1(K) \to \mathbf{Z}, \quad \varphi\left(\alpha\left(\langle p_0p_1\rangle + \langle p_1p_2\rangle + \langle p_2p_0\rangle\right)\right) := \alpha$$

は同型写像なので、$H_1(K) \cong \mathbf{Z}$.

2. (a)

$$\begin{aligned} K \;=\; \{&|p_0p_1p_2|, |p_0p_1p_5|, |p_1p_2p_3|, |p_1p_4p_5|, |p_2p_3p_4|, |p_3p_4p_5|, |p_0p_1|, |p_0p_2|, \\ &|p_0p_5|, |p_1p_2|, |p_1p_3|, |p_1p_4|, |p_1p_5|, |p_2p_3|, |p_2p_4|, |p_3p_4|, \\ &|p_3p_5|, |p_4p_5|, |p_0|, |p_1|, |p_2|, |p_3|, |p_4|, |p_5|\} \end{aligned}$$



(b) $\beta_0 = 6$, $\beta_1 = 12$, $\beta_2 = 6$ より $\chi(K) = 6 - 12 + 6 = 0$.

(c) 問 1. の (a) より

$$Z_0(K) = C_0(K) = \{\alpha_0\langle p_0\rangle + \alpha_1\langle p_1\rangle + \alpha_2\langle p_2\rangle + \alpha_3\langle p_3\rangle + \alpha_4\langle p_4\rangle + \alpha_5\langle p_5\rangle : \alpha_j \in \mathbf{Z}\}. \tag{4}$$

$$\begin{aligned} c \in C_1(K) : \partial_1(c) \;=\; &\partial_1\left(\alpha_0\langle p_0p_1\rangle + \alpha_1\langle p_0p_2\rangle + \alpha_2\langle p_0p_5\rangle + \alpha_3\langle p_1p_2\rangle + \alpha_4\langle p_1p_3\rangle\right. \\ &\alpha_5\langle p_1p_4\rangle + \alpha_6\langle p_1p_5\rangle + \alpha_7\langle p_2p_3\rangle + \alpha_8\langle p_2p_4\rangle + \alpha_9\langle p_3p_4\rangle \\ &\left.+\alpha_{10}\langle p_3p_5\rangle + \alpha_{11}\langle p_4p_5\rangle\right). \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} B_0(K) \;=\; &\{l_0\left(\langle p_0\rangle - \langle p_5\rangle\right) + l_1\left(\langle p_1\rangle - \langle p_5\rangle\right) + l_2\left(\langle p_2\rangle - \langle p_5\rangle\right) \\ &+ l_3\left(\langle p_3\rangle - \langle p_5\rangle\right) + l_4\left(\langle p_4\rangle - \langle p_5\rangle\right)\}, \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} l_0 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2, \\ l_1 &= -\alpha_0 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ l_2 &= -\alpha_1 - \alpha_3 + \alpha_7 + \alpha_8, \\ l_3 &= -\alpha_4 - \alpha_7 + \alpha_9 + \alpha_{10}, \\ l_4 &= -\alpha_5 - \alpha_8 - \alpha_9 + \alpha_{11}. \end{aligned}$$

よって
$$H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K) = \{m \langle p_5 \rangle + B_0(K) : m \in \mathbf{Z}\}.$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi : H_0(K) \to \mathbf{Z}, \quad \varphi (m \langle p_5 \rangle + B_0(K)) := m$$
は同型写像なので、$H_0(K) \cong \mathbf{Z}$.

(d) 前小問で $\partial_1(c) = 0$ とすると $l_0 = l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 0$.
$\alpha_2, \alpha_6, \alpha_8, \alpha_{10}, \alpha_{11}$ を消去して
$$\begin{aligned}
c &= \alpha_0 \langle p_0p_1 \rangle + \alpha_1 \langle p_0p_2 \rangle - (\alpha_0 + \alpha_1) \langle p_0p_5 \rangle + \alpha_3 \langle p_1p_2 \rangle + \alpha_4 \langle p_1p_3 \rangle \\
&\quad \alpha_5 \langle p_1p_4 \rangle + (\alpha_0 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5) \langle p_1p_5 \rangle + \alpha_7 \langle p_2p_3 \rangle + (\alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_7) \langle p_2p_4 \rangle \\
&\quad +\alpha_9 \langle p_3p_4 \rangle + (\alpha_4 + \alpha_7 - \alpha_9) \langle p_3p_5 \rangle + (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 - \alpha_7 + \alpha_9) \langle p_4p_5 \rangle \\
&= \alpha_0 (\langle p_0p_1 \rangle - \langle p_0p_5 \rangle + \langle p_1p_5 \rangle) + \alpha_1 (\langle p_0p_2 \rangle - \langle p_0p_5 \rangle + \langle p_2p_4 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) \\
&\quad +\alpha_3 (\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_1p_5 \rangle + \langle p_2p_4 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) + \alpha_4 (\langle p_1p_3 \rangle - \langle p_1p_5 \rangle + \langle p_3p_5 \rangle) \\
&\quad +\alpha_5 (\langle p_1p_4 \rangle - \langle p_1p_5 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) + \alpha_7 (\langle p_2p_3 \rangle - \langle p_2p_4 \rangle + \langle p_3p_5 \rangle - \langle p_4p_5 \rangle) \\
&\quad +\alpha_9 (\langle p_3p_4 \rangle - \langle p_3p_5 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) \\
&= (\alpha_0 + \alpha_1) (\langle p_0p_1 \rangle - \langle p_0p_5 \rangle + \langle p_1p_5 \rangle) + \alpha_1 (- \langle p_0p_1 \rangle + \langle p_0p_2 \rangle - \langle p_1p_2 \rangle) \\
&\quad +(\alpha_1 + \alpha_3) (\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_1p_4 \rangle + \langle p_2p_4 \rangle) + \alpha_4 (\langle p_1p_3 \rangle - \langle p_1p_5 \rangle + \langle p_3p_5 \rangle) \\
&\quad +(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5) (\langle p_1p_4 \rangle - \langle p_1p_5 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) + \alpha_7 (\langle p_2p_3 \rangle - \langle p_2p_4 \rangle + \langle p_3p_4 \rangle) \\
&\quad +(-\alpha_7 + \alpha_9) (\langle p_3p_4 \rangle - \langle p_3p_5 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) \\
&= \{m (\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_1p_4 \rangle + \langle p_2p_4 \rangle) + B_1(K) : m \in \mathbf{Z}\}.
\end{aligned}$$
$$\varphi : H_1(K) \to \mathbf{Z}, \quad \varphi (m (\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_1p_4 \rangle + \langle p_2p_4 \rangle) + B_1(K)) := m$$
は同型写像なので、$H_1(K) \cong \mathbf{Z}$.
注: $\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_1p_4 \rangle + \langle p_2p_4 \rangle$ は胴周りのループ。

(e) $C_3(K) = \{0\} \Longrightarrow B_2(K) = \{0\}$.
$$\begin{aligned}
c &= \alpha_0 (\langle p_0p_1 \rangle - \langle p_0p_2 \rangle + \langle p_1p_2 \rangle) + \alpha_1 (\langle p_0p_1 \rangle - \langle p_0p_5 \rangle + \langle p_1p_5 \rangle) \\
&\quad +\alpha_2 (\langle p_1p_2 \rangle - \langle p_1p_3 \rangle + \langle p_2p_3 \rangle) + \alpha_3 (\langle p_1p_4 \rangle - \langle p_1p_5 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) \\
&\quad +\alpha_0 (\langle p_2p_3 \rangle - \langle p_2p_4 \rangle + \langle p_3p_4 \rangle) + \alpha_5 (\langle p_3p_4 \rangle - \langle p_3p_5 \rangle + \langle p_4p_5 \rangle) \\
&= 0.
\end{aligned}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0.$$

$$\Downarrow$$

$B_2(K) = 0.$

$$H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K) = \{0\}.$$

(f)

$$\chi(K) = R_0(K) - R_1(K) + R_2(K) = 1 - 1 + 0 = 0.$$

3. (a) $\lambda = \nu$ とする。$\mu = \rho$ なら $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\nu\rho} = 1$ で、$\mu \neq \rho$ なら $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\nu\rho} = 0.$
   $\lambda \neq \nu$ とする。$\lambda = \rho$ かつ $\mu = \nu$ なら $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\nu\rho} = -1$ で、それ以外なら $\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\nu\rho} = 0.$
   よって OK.

   (b) 前小問で $\nu = \lambda$ とすれば、

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\lambda\nu} = \delta^\lambda_\lambda\delta^\mu_\nu - \delta^\lambda_\nu\delta^\mu_\lambda = 3\delta^\mu_\nu - \delta^\mu_\nu = 2\delta^\mu_\nu.$$

   (c) 前小問で $\nu = \mu$ とすれば

$$\epsilon^{\kappa\lambda\mu}\epsilon_{\kappa\lambda\mu} = 2\delta^\mu_\mu = 6.$$

4. (a)

$$(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3) = (\mathbf{e}'_1\mathbf{e}'_2\mathbf{e}'_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A = (A^{\kappa'}_\kappa) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = (A^\kappa_{\kappa'}) \equiv \begin{pmatrix} -2 & -3 & \frac{9}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

$$(v^{\lambda'}) = A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

$$(w_{\lambda'}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

   (b)

$$(T^{\lambda'}_{\mu'}) = A(T^\lambda_\mu)A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -11 & 18 \\ -2 & -7 & 14 \\ -4 & -10 & 18 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$(A^{-1})^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -\frac{21}{2} \\ 7 & 11 & -16 \\ -\frac{21}{2} & -16 & \frac{47}{2} \end{pmatrix}.$$

5. (a)

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{w}_3(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) &= \frac{2!}{1!1!}\frac{1}{2!}\left(\mathbf{w}_2\left(\mathbf{v}_2\right)\mathbf{w}_3\left(\mathbf{v}_3\right) - \mathbf{w}_2\left(\mathbf{v}_3\right)\mathbf{w}_3\left(\mathbf{v}_2\right)\right) \\ &= \mathbf{w}_2\left(\mathbf{v}_2\right)\mathbf{w}_3\left(\mathbf{v}_3\right) - \mathbf{w}_2\left(\mathbf{v}_3\right)\mathbf{w}_3\left(\mathbf{v}_2\right). \end{aligned}$$

これを用いて

$$\begin{aligned} &(\mathbf{w}_1 \wedge (\mathbf{w}_2 \wedge \mathbf{w}_3)) \\ =\ & \frac{3!}{1!2!}\frac{1}{3!}\sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathbf{w}_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)})\left[\mathbf{w}_2\left(\mathbf{v}_{\sigma(2)}\right)\mathbf{w}_3\left(\mathbf{v}_{\sigma(3)}\right) - \mathbf{w}_2\left(\mathbf{v}_{\sigma(3)}\right)\mathbf{w}_3\left(\mathbf{v}_{\sigma(2)}\right)\right] \\ =\ & \frac{1}{2}\sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathbf{w}_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)})\mathbf{w}_2(\mathbf{v}_{\sigma(2)})\mathbf{w}_3(\mathbf{v}_{\sigma(3)}) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{\sigma' \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma')\mathbf{w}_1(\mathbf{v}_{\sigma'(1)})\mathbf{w}_2(\mathbf{v}_{\sigma'(2)})\mathbf{w}_3(\mathbf{v}_{\sigma'(3)}) \\ =\ & \sum_{\sigma \in S_3} \mathrm{sgn}(\sigma)\mathbf{w}_1(\mathbf{v}_{\sigma(1)})\mathbf{w}_2(\mathbf{v}_{\sigma(2)})\mathbf{w}_3(\mathbf{v}_{\sigma(3)}). \end{aligned}$$

ただし、σ' は σ に続けて第 2 要素と第 3 要素を互換するような置換であり、$\mathbf{sgn}(\sigma) = \mathbf{sgn}(\sigma')$ となる。

(b) 置換 σ を施すことは、外積の行列式表示で行を σ に従って入れ換えることに対応する。よって、行列式の定義より OK.

(c)

$$\begin{aligned} & S \wedge T \\ =\ & \left(\sum_{1 \le \kappa_1 < \cdots < \kappa_p \le n} S_{\kappa_1 \cdots \kappa_p} \mathbf{e}^{\kappa_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\kappa_p}\right) \wedge \left(\sum_{1 \le \lambda_1 < \cdots < \lambda_q \le n} T_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} \mathbf{e}^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\lambda_q}\right) \\ =\ & \sum_{1 \le \kappa_1 < \cdots < \kappa_p \le n} \sum_{1 \le \lambda_1 < \cdots < \lambda_q \le n} S_{\kappa_1 \cdots \kappa_p} T_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} \left(\mathbf{e}^{\kappa_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\kappa_p}\right) \wedge \left(\mathbf{e}^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\lambda_q}\right) \\ =\ & (-1)^{pq} \sum_{1 \le \kappa_1 < \cdots < \kappa_p \le n} \sum_{1 \le \lambda_1 < \cdots < \lambda_q \le n} S_{\kappa_1 \cdots \kappa_p} T_{\lambda_1 \cdots \lambda_q} \left(\mathbf{e}^{\lambda_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\lambda_q}\right) \wedge \left(\mathbf{e}^{\kappa_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}^{\kappa_p}\right) \\ =\ & (-1)^{pq} T \wedge S. \end{aligned}$$