解析数理工学

第１問

レポートと同じなので省略。

第２問

(a) 部分積分する。

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^n \log x \ dx &= [\frac{x^{n+1}}{n+1}\log x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^n}{n+1} \ dx \\ &= -\frac{1}{(n+1)^2}\end{aligned}$$

(b) $\log(1-x)$ を Taylor 展開して、(a) を利用する。

$$\log(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$$

よって、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log(1-x)\log x \ dx &= \int_0^1 -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n \log x \ dx \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^n \log x \quad \cdots(*) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{(n+1)^2} \quad * \text{(a) より} * \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\frac{1}{n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)^2}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1-(\frac{\pi^2}{6}-1) \\ &= 2-\frac{\pi^2}{6}\end{aligned}$$

$(*)\cdots f_n(x) = -\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}\log x \ (x\in[0,1])$ とすると、和を取る各項は正なので $f_n(x)$ は単調増加列。よって、その極限操作と積分の交換ができる。（単調収束定理）

第３問

とりあえず、$||x||_2 < \infty \Leftrightarrow ||x||_2^2 < \infty$ なので、$||x||_2^2$ を考える。

(a) $\forall x \in l^1$ とすると、$||x||_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 + 2\sum_{i \neq j} |x_i||x_j| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|)^2 < \infty$ なので、$x \in l^2$

よって、$l^1 \subset l^2$

さらに、$x_n = \frac{1}{n}$とすると、$||x||_1 = \infty, ||x||_2^2 = \frac{\pi^2}{6} < \infty$ なので、$l^1 \neq l^2$ である。

(b) 実際にノルムを計算してみる。

$$
\begin{aligned}
||F_a||_1 &= \int_{-1}^{1} |x|^{-a} dx \\
&= 2\int_0^1 x^{-a} dx \\
&= \begin{cases} \frac{2}{1-a} & a < 1 \text{ のとき} \\ \infty & a \geq 1 \text{ のとき} \end{cases} \\
||G_b||_1 &= 2\int_1^{\infty} x^{-b} dx \\
&= \begin{cases} \frac{2}{b-1} & b > 1 \text{ のとき} \\ \infty & b \leq 1 \text{ のとき} \end{cases}
\end{aligned}
$$

よって、$F_a, G_b \in L^1(\boldsymbol{R})$ となる条件は、$0 < a < 1 < b$

また、同様に

$$
\begin{aligned}
||F_a||_2^2 &= 2\int_0^1 (x^{-a})^2 dx \\
&= 2\int_0^1 x^{-2a} dx \\
||G_b||_2^2 &= 2\int_0^1 x^{-2b} dx
\end{aligned}
$$

とすると、上の議論より、$F_a, G_b \in L^2(\boldsymbol{R})$ となる条件は、$0 < 2a < 1 < 2b$、すなわち $0 < a < \frac{1}{2} < b$

(c) 例えば $a = b = \frac{3}{4}$ とすると、(b) より、$F_a \in L^1(\boldsymbol{R}), F_a \notin L^2(\boldsymbol{R})$ なので $l^1 \not\subset l^2$ であり、また $G_b \in L^2(\boldsymbol{R}), G_b \notin L^1(\boldsymbol{R})$ なので $l^2 \not\subset l^1$ よって包含関係はない。

(d) $0 < a < 1 < b$ のとき、実際にノルムを計算すると、

$$
||F_a + G_b||_1 = ||F_a - G_b||_1 = ||F_a||_1 + ||G_b||_1 \ (= \frac{2}{1-a} + \frac{2}{b-1})
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
||F_a + G_b||_1^2 + ||F_a - G_b||_1^2 &= 2(||F_a||_1^2 + 2||F_a||||G_b|| + ||G_b||^2) \\
&\neq 2(||F_a||_1^2 + ||G_b||^2)
\end{aligned}
$$

なので、中線定理が成り立たない。よってヒントより、L^1 ノルムと整合する内積は定義できない。