数学及力学演習 I(物理工学科) 2004 年度冬学期

星健夫教員

解答用紙は 3 枚すべて (白紙でも) 提出せよ (計算用紙は, 提出しなくて良い). また, 問題文における各種記号の定義は, 特に断らない限り, 演習中に用いた定義と同じである.

1. 2 次元座標 (u, v) を次式で導入する. $(v \geq 0)$

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$
$$y = uv$$

(a) スケール因子 h_u, h_v を求めよ. また, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ に対し, 内積 $\boldsymbol{e}_u \cdot \boldsymbol{e}_v$ を求めよ. [*1]

(b) $(u, v) = (1, 1)$ のとき, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ をそれぞれ図示せよ. 同じ図に曲線 $v(x, y) = 1$ を描き加え, この曲線と基本ベクトル $\boldsymbol{e}_u, \boldsymbol{e}_v$ との関係を述べよ.

2. (a) ベクトル $\boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y$ に対して, $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分をそれぞれ書き下せ.

(b) Gauss の定理は次式で与えられる. (証明しなくて良い. ただし答案では, 積分など, 記号の意味を明記すること)

$$\iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n} dS = \iiint_V \mathrm{div}\boldsymbol{A} dV$$

下記の場合について, 上式の両辺を計算することにより, Gauss の定理の成立を論ぜよ.

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}, V : \text{原点を中心とした半径 } R(> 0) \text{ の球.}$$

3. (a) 束縛条件

$$\int_{x_a}^{x_b} \{y(x)\}^2 dx = 1$$

のもとで, 汎関数 I

$$I = I[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} \{\frac{-1}{2} y(x) y''(x) + V(x)\{y(x)\}^2\} dx$$

に対応する Eular 方程式を求めよ. ($V(x)$ は与えられた関数. 適当な境界条件を仮定してよい)

(b) 以下では, $x_a = 0, x_b = 1, V(x) = 0$ とし, また, 境界条件として $y(0) = y(1) = 0$ をとる. 汎関数 I の最小値を与える $y(x)$ をもとめ, そのときの I の値を計算せよ.

[*1] 座標 q_i に対するスケール因子 h_i, 基本ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ は $h_i = |\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}|, \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}$.

4. (a) $\phi = \phi(t,x,y,z)$ で決まる汎関数

$$S[\phi] = \iiiint L(t,x,y,z,\phi,\phi_t,\phi_x,\phi_y,\phi_z)dtdxdydz$$

を考える．対応する Eular 方程式は, 次式で与えられる．(証明しなくて良い)

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial L}{\partial \phi_t}) - \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial L}{\partial \phi_x}) - \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial L}{\partial \phi_y}) - \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial L}{\partial \phi_z}) = 0$$

ここで $\phi_t = \dfrac{\partial \phi}{\partial t}$ である．(ϕ_x なども同様) L が以下の場合について, Euler 方程式を具体的に書き下せ．(α, β は正の定数)

$$L = \alpha\phi^2 + (\mathrm{grad}\phi)^2 - \beta(\frac{\partial \phi}{\partial t})^2$$

(b) 円筒面上で, 2 点を結ぶ最短の曲線を考えたい．これを変分問題として論ぜよ．

5. $y = y(t)$ に対する微分方程式, $y'' + \omega_0^2 y = f\cos\omega t$ を考える．ただし,ω_0, ω, f は正の定数.

(a) $\omega \neq \omega_0$ の時, 与方程式を解け.

(b) (a) で得られた解において, $\omega \to \omega_0$ の極限をとるとどうなるか.

6. $y = y(x), x > 0$ に対し, 以下の常微分方程式を考える．

$$\frac{d}{dx}(x^2\frac{dy}{dx}) + x^2 y = 0$$

(a) 冪級数解の一般論をもちいて, 原点で正則な解が存在することを示し, この解を具体的に (級数解として) 求めよ.

(b) (a) の議論をもとに, 与方程式の一般解を論ぜよ.