算法数理工学

牧野和久教員

2007/02

1. 下記の (a) から (j) の文章が正しいかどうか成否を述べよ.
   (a) 問題 A のそれぞれの問題例に対して, それを解くアルゴリズムが存在するとき, A は計算可能であるという.
   (b) 今後, 計算機の性能が向上すれば, どんな問題も計算可能になる.
   (c) アルゴリズムの時間量は, コード化したときの長さに比例する.
   (d) 時間量と領域量は, アルゴリズムの性能を評価する重要な基準ではあるが, それ以外にも, 単純さやデバッグのし易さなども重要である.
   (e) $0(n^3) = 3n^3 + n^2 \log n - 3n$ である.
   (f) 平均計算量は, 確率的なアルゴリズムを解析するときに用いられる概念である.
   (g) NP 完全問題は, NP 困難である.
   (h) NP 完全問題が多項式時間で解くことができれば, NP = coNP が成立する.
   (i) 問題 A から問題 B に多項式時間帰着でき, また, 問題 B から問題 C に多項式時間帰着できるとする. このとき, 問題 C が P に属すれば, 問題 A も P に属する.
   (j) 問題 A から問題 B に多項式時間帰着でき, また, 問題 B から問題 C に多項式時間帰着できるとする. このとき, 問題 A が NP 完全であれば, 問題 C も NP 完全である.
2. ソーティングとは, n 個の相異なる整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が与えられたとき, それらを $a_{i1} < a_{i2} < \cdots < a_{in}$ と並べ換える問題である.
   (a) 次のアルゴリズムの最悪時間量の上界を (理由と共に) 与えよ.

```
flag := 1
while flag = 1 do
  flag := 0
  for number i from 1 to n-1
    if a_i > a_{i+1} then
      b := a_i
      a_i := a_{i+1}
      a_{i+1} := b
      flag := 1
    endif
  endfor
endwhile
```

   (b) (a) のアルゴリズムの最悪時間量の下界を (理由と共に) 与えよ.
   (c) 比較に基づくソーティング問題の最悪時間量が $O(n \log n)$ になることを説明せよ.
   (d) 比較に基づくソーティング問題の最悪時間量が $\Omega(n \log n)$ になることを説明せよ.

3. 分割問題とは, n 個の正整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が与えられたとき, それらの整数を 2 つの互いに素な部分集合に, どちらの部分集合の和も等しくなるように分割できるか, すなわち,

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i$$

となる $\{1, 2, \cdots .n\}$ の部分集合 I が存在するかを問う問題である. この問題に対して動的計画法に基づくアルゴリズムを考えたい.

(a) $A(j, c)(j = 1, \cdots, n, c = 0, \cdots, 1/2 \sum_{k=1}^{n} a_k)$ を $\sum_{i \in J} a_i = c$ となる $\{1, 2, \cdots, j\}$ の部分集合 J が存在すれば $True$ を, そうでなければ $False$ をとる変数を用意し, 最適性原理を示せ.

(b) (a) で与えた最適性原理を用いて, アルゴリズムを示せ.

(c) (b) で与えたアルゴリズムの最悪時間量を示せ. また, それが多項式時間かどうか理由と共に述べよ.

4. 下記のデータ構造に関する問題に答えよ.

(a) ヒープとは, どのような操作を実現するためのデータ構造か記せ. また, そのときに必要となる時間について述べよ. ただし, 要素数を n とする.

(b) ヒープの構造を示せ. また, 要素数を n とするとき, 高さがいくつになるか述べよ.

(c) ヒープと 2 分探索木との違いについて述べよ. (1. 構造の違い, 2. 実現可能な操作)

(d) 平衡な 2 分探索木とは, どのような 2 分探索木か述べよ.