数学及力学演習I　2003年度

初貝安弘教員

ノート, 参考書など持ち込み不可. 解答は答えのみでなく, 答に至るまでの過程も必ず答えること. 答のみの場合は減点する場合がある. 問題に不備があると思われるところがあれば, それを明記し適切な問題に設定してから答えよ.

1. 次の微分方程式を解け.
   (a) $\frac{dy}{dx} = yx$
   (b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + x$
   (c) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}y^{1-n} + xy$
   (d) $y = (\frac{dy}{dx})x + (\frac{dy}{dx})^2$
   (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+2y}$
2. 次の連立微分方程式を解け.
   (a) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$
   (b) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$
   (c) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & -\cos(\omega t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
   (d) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$
   (e) $\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix}$
3. 次の微分方程式を解け.
   (a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$
   (b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$
   (c) $(\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y)(\frac{dy}{dx} + y^2) = 0$
   (d) $\frac{d^2y}{dx^2} + \omega_0^2 y + a\cos(\omega x) = 0$
   (e) $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} = \log x$

4.

(a) x-y 平面上に楕円の経路があり, 楕円の長軸短軸は $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ $(a \geq b > 0)$ を通るものとする. $(-a, 0)$ から時計回りに $(a, 0)$ にたどり着く経路を C とし, この x-y 平面を含む 3 次元空間上で $\boldsymbol{A}(x, y, z) = (x + y, xy, 0)^t$ が定義されている. このとき,

(1) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{t}$

(2) $\displaystyle\int_C \boldsymbol{A} \times d\boldsymbol{t}$

を求めよ. ただし, $d\boldsymbol{t}$ は経路上での微小線分を持った接線ベクトルとする.

(b) 3 次元空間上で位置ベクトル $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ を定義すると, $\nabla^2(\frac{1}{|r|}) = -4\pi\delta(\boldsymbol{r})$ であることを示せ. $\delta(\boldsymbol{r})$ はデルタ関数である.

5. 2 次元 x-y 平面上で $(0, 1)$ と $(1, 0)$ を結ぶ曲線のうち, 曲線の長さが最小になる曲線を辺分方で求めよ. また, 曲線の長さが $\pi/2$ に拘束されている曲線のうち, 曲線と x 軸の作る面積が最大になるとき, つまり曲線が $y = f(x)$ で表されるならば, $S = \displaystyle\int_0^1 dx |f(x)|$ が最大になるときの曲線は何か.

6. これまでの授業の感想, 進め方, 諸々気づいた点があれば何でも書いてください. (ここは評価には無関係である.)