数学及力学演習 I(物理工学科)

丸山勲教員

2007/03/05

- 参考書, ノート類の持込は不可とする.
- 問題用紙は 1 枚 (表裏), 解答用紙は 4 枚, 計算用紙は 1 枚. 各問につき 1 枚の解答用紙を用いること.
- 問題の設定が不十分, または不適当と思う場合はその旨を明記し, 合理的な設定をした上で回答せよ.
- 計数工学科の学生がこのテスト問題を解いても零点であるので, 十分注意する事.

1. 以下の小問について, 略解と共に解答を, 解答用紙 1 に記せ.
   (a) $y' = 4y + e^{4x}$ を解け.
   (b) $3y'' + 7y' + 2y = x$ を解け.
   (c) 以下の三つの常微分方程式の内, 一つを解け. 解答にどれを選んだか明記すること.
      i. $y = xy' + \dfrac{1}{y}$
      ii. $y = xy' + \dfrac{1}{y'}$
      iii. $y = xy' - x^2 + y^2$
   (d) $\boldsymbol{A} = {}^t(x^3, y^2, z)$ とするとき $\displaystyle\int_S \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S}$ を求めよ. (S は半径 1 の球の表面とし, ベクトル面積素は外向き法線方向.)
   (e) 三次元極座標 (r, θ, ϕ) から作る直交曲線座標系を考える.[*1] その基底ベクトル $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta, \boldsymbol{e}_\phi$ を書き下せ. 途中式は略してよい.
   (f) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}_r$ としたとき, $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ を求めよ.
   (g) 四次元時空のスカラー場 $\phi(t, x, y, z)$ に関する汎関数 $J[\phi] = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int dtdV\{(\nabla\phi)\cdot(\nabla\phi) - (\dot{\phi})^2\}$ のオイラー方程式を書き下せ.

2. 以下の小問について, 解法と共に解答を, 解答用紙 2 に記せ.
   (a) 上向きを z 軸とした時, 断面積が $A(z) = Az^2$ となる漏斗状のフラスコに水が満杯に入っている. (A は定数) 液面の高さ $z = z(t) > 0$ とした時,

$$A(z)dz = -\alpha\sqrt{z}dt$$

   という微分方程式に従うとする. 時刻 $t = 0$ で $z(0) = h$ として, 水が無くなる時刻 T を求めよ. また, 液面の高さ z を縦軸, 時刻 t を横軸にして図に示せ.

[*1] $\boldsymbol{r} = {}^t(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

(b) 以下の微分方程式の固定点 (平衡点) の安定性を調べ, 図示せよ.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y \\ \frac{dy}{dt} = x - y \end{cases}$$

(c) $y = y(t) \in \mathbf{R}$ に関する次の強制振動の微分方程式を考えよう. $\omega, \omega_0 > 0$ とする.

$$\ddot{y} + \omega^2 y = A \cos \omega_0 t \tag{1}$$

i. $A = 0$ の時の一般解 (斉次解) を求めよ.

ii. $z = z(t) \in (C)$ が次の微分方程式

$$\ddot{z} + \omega^2 z = A e^{i\omega_0 t}$$

の解である時, $y = \mathrm{Re}[z(t)]$ は強制振動の微分方程式 (1) を満たすことを示せ.

iii. 強制振動の一般解 $y(t)$ を求めよ. ここで, $\omega = \omega_0, \omega \neq \omega_0$ の場合分けに注意せよ.

(d) 級数解の方法を用いて, $x^2 y'' - xy' + y = 0$ の $x = 1$ 近傍での二つの独立解を求めよ. この時, 漸化式の解法は詳しく説明すること.

3. 以下の小問について, 解法と共に解答を, 解答用紙 3 に記せ.

(a) 三次元極座標 (r, θ, ϕ) における関数 $y = y(\theta) \in \mathbf{R}$ について, ラプラシアンを作用させた $\Delta y(\theta)$ を書き下せ.

(b) 微分方程式 $\Delta(\theta) = -\dfrac{l(l+1)}{r^2} y(\theta)$ は, $r \neq 0$ とし $x = \cos\theta$ と変換すると, Legendre 方程式

$$(1 - x^2) y'' - 2xy' + l(l+1) y = 0$$

となることを示せ.

(c) Legendre 方程式の全ての特異点を挙げ, 確定特異点, 不確定特異点のいずれであるか示せ.

(d) $l = 0, 1, 2, \cdots$ の場合, Legendre 方程式 $x = 0$ 近傍の二つの独立解のうち一つは有限次数の多項式 (Legendre 多項式) となることが知られている. $l = 0, 1, 2$ の場合に, Legendre 多項式を求めよ.

(e) 上の $l = 0, 1, 2$ の解 $y_l(x)$ を規格化せよ. 具体的には, θ の表示に戻し, $\displaystyle\int_S y_l(\theta)^2 dS = 1$ となるように未知定数を決定せよ. (S は半径 1 の球の表面とする. $dS = |d\boldsymbol{S}|$ である)

4. 以下の小問について, 解法と共に解答を, 解答用紙 4 に記せ.

(a) 三次元ベクトル $\boldsymbol{r}(t)$ に関する汎関数 $S[\boldsymbol{r}] = \displaystyle\int dt (\frac{1}{2}|\dot{\boldsymbol{r}}|^2 + \phi(\boldsymbol{r}(t), t) - \dot{\boldsymbol{r}}(t) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}(t), t))$ のオイラー方程式を書き下せ. ただし, 答えは $\phi, \boldsymbol{A}$ ではなく $\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ を用いて表せ.

(b) 二点 $(-1, 1), (1, 1)$ を通る曲線 $y = y(x)$ を x 軸のまわりに回転したときに出来る図形の表面積を最小とするような曲線 $y(x)$ を曲線の長さを L とする条件の下で求めよ.

(c) 曲線 $y = y(x)$ の微小部分 (長さ ΔL) の位置エネルギーは $\rho \Delta L g y$, 弾性エネルギー $\dfrac{k}{2}(\Delta L)^2$ で与えられるとする. ここで, y の正方向を上向きとして, 重力定数 g, 曲線の線密度 ρ, バネ定数 k とした. この時,

i. 伸びないひも : 全体の長さを L とする条件下で, 位置エネルギーを極小とする曲線. (弾性エネルギーは考えない)

ii. 強力ゴム : 弾性エネルギーを極小とする曲線. (位置エネルギーは考えない. 全体の長さは不定.)

iii. 弱いゴム：位置エネルギーと弾性エネルギーの和を極小とする曲線. (全体の長さは不定.)[*2]

のそれぞれを求め, 図示せよ (略図で良い). ただし曲線の両端は $(1,-1),(-1,1)$ に固定されているとする. また, 便宜的に $g=\rho=k=1$ としても良い.

[*2] 近似解でも正解とする. その際の関数形は (i), (ii) の両方を含むように適宜設定せよ.