

# 代数数理工学

山本教員

2000/02/08

以下の問いに答えよ。(答案用紙には, 任意の順序で回答しても構わない.)

1. 整数環  $\mathbf{Z}$  と  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$  に対して次の問いに答えよ. ただし,  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  上の加法と乗法の演算は, 実数体上の演算と同じものとする.
  - (a)  $\mathbf{Z}$  の零元と単位元を示せ. また,  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  の零元と単位元も示せ.
  - (b)  $\mathbf{Z}$  の単元を全て列挙せよ.  $\mathbf{Z}$  の単元とはならない  $\mathbf{Z}$  の単元を一つ求めよ. また, それを用いて,  $\mathbf{Z}$  の単元は可算無限個存在することを示せ.
  - (c)  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  が整域であることと体でないことを示せ.
  - (d)  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  の商体を求め, なるべくシンプルな形で表現せよ.
  - (e)  $a + b\sqrt{2}$  に対して,  $\phi(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|$  と定義する. この写像  $\phi$  を用いて,  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  がユークリッド環であることを示すには, どのような関係が成立することを証明すればよいか.
  - (f)  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  がユークリッド環であることを証明せよ.
  - (g)  $\mathbf{Z}$  の単項イデアル  $(2)$  は極大イデアルか否か, また素イデアルか否かを回答し, その理由を説明せよ.
  - (h)  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  の単項イデアル  $(2)$  は極大イデアルか否か, また素イデアルか否かを回答し, その理由を説明せよ.
  - (i) 剰余環  $A = \mathbf{Z}[\sqrt{2}]/(2)$  の加法および乗法の演算表を示せ. また,  $A$  が整域であるか否かを回答し, その理由を説明せよ.
  - (j) 上で与えられた  $A$  の極大イデアル  $H$  を求めよ.
  - (k) 剰余環  $A/H$  はどのような体と同型になるかを示し, その理由を説明せよ.
  - (l)  $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + b\sqrt{-1} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$  に対して,  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  と  $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$  は加群として同型であるか否かを回答し, その理由を説明せよ. また,  $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$  と  $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$  は環として同型であるか否かを回答し, その理由を説明せよ.
2.  $\mathbf{F}_3 = \text{GF}(3)$  に対して, 下記の問いに答えよ.
  - (a)  $\mathbf{F}_3$  上の加法および乗法の演算表を示せ.
  - (b) 多項式環  $\mathbf{F}_3[x]$  において,  $f(x) = x^2 + x + 2$  は既約であることを示せ.
  - (c)  $f(x)$  の根を  $\alpha$  としたとき, 拡大体  $\mathbf{F}_{3^2} = \text{GF}(3^2)$  上の加法および乗法の演算表を求めよ.
  - (d)  $\mathbf{F}_{3^2}$  の  $\mathbf{F}_3$  に対する次数  $[\mathbf{F}_{3^2} : \mathbf{F}_3]$  は幾つであることを示し, その理由を述べよ.
  - (e)  $\mathbf{F}_{3^2}$  の標数は幾つであることを示し, その理由を述べよ.
  - (f)  $\mathbf{F}_3[x]/(x^2 + 2)$  と  $\mathbf{F}_3$  とが同型であるか否かを回答し, その理由を述べよ.
  - (g)  $\mathbf{F}_3$  に,  $\mathbf{F}_3$  上の超越元  $\beta$  を付加して得られる超越的拡大体  $\mathbf{F}_3(\beta)$  はどのような集合となるか.

(h)  $\mathbb{F}_{3^2}$  は代数的閉体か否かを回答し, その理由を説明せよ.