固体物理第一解答

1.
(a)$n = 2, 3, 4, 6$
(b) 物体に磁場をかけると、その物体が磁場に平行で大きさが比例した磁化を持つこと。
(c) 面心立方格子を 2 つ重ね、片方の格子をもう片方の格子の対角線方向に 1/4 ずらして配置した構造。ZnS などの II-VI 元素間にみられる。（ダイヤモンド構造の異種原子版）
(d) 低温、強磁場の条件下で金属の磁気モーメントが $1/B$ に対して周期的に振動する現象。
(e) 熱膨張・熱抵抗など。
2.
(a) 体心立方格子の基本並進ベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \frac{a}{2}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{a}_2 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{a}_3 = \frac{a}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z)$$

を、逆格子ベクトルの定義式

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi\frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi\frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}, \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi\frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)}$$

に従って計算すれば

$$\mathbf{b}_1 = \frac{2\pi}{a}(\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z), \quad \mathbf{b}_2 = \frac{2\pi}{a}(\mathbf{e}_z + \mathbf{e}_x), \quad \mathbf{b}_3 = \frac{2\pi}{a}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

を得る（一般に体心立方格子の逆格子ベクトルは面心立方格子の、面心立方格子の逆格子ベクトルは体心立方格子の基本並進ベクトルとなる）。
(b) 波長 λ の電磁波が物質の格子面で反射するとき、格子面の間隔を d、入射角を θ とすると

$$2d\sin\theta = n\lambda \quad (n \in \mathbb{Z})$$

が成り立つという法則。光路差（左辺）が波長の整数倍になる（右辺）とき位相が揃い強め合うため。
(c)(b) で $d = 3.08, \lambda = 1.54$[Å] を代入すれば、許される n の値は $1, 2, 3, 4$ でそれに対応する $\sin\theta$ の値は 1,3/4,1/2,1/4 となる。これに対応する θ の値を三角関数表を用いて有効数字 2 桁まで求めると、$\theta = 90°, 49°, 30°, 15°$。
(d)

- 逆格子ベクトル $\boldsymbol{G} = \Delta\boldsymbol{k}$ は (100) 面に垂直
- この方向の逆格子空間の格子点間距離は $\dfrac{2\pi}{a}$

であることに注意して上記 4 通りの場合を作図する（図略）。

3.
(a) 波数空間において体積 $(2\pi/L)^3$ ごとに 1 つ（さらにスピンにより 2 通り）ある。波数 k_F 以下の状態の数は、

$$2\cdot\frac{\frac{4\pi k_F^3}{3}}{\frac{(2\pi)^3}{L^3}}=N$$

となる。$N/L^3=n$ であるから

$$k_F=\sqrt[3]{3\pi^2 n}$$

(b)

$$E_F=\frac{\hbar k_F^2}{2m}=\frac{h^2}{8\pi m}\sqrt[3]{9\pi n^2}[\mathrm{J}]=\frac{h^2}{8\pi e m}\sqrt[3]{9\pi n^2}[\mathrm{eV}]\fallingdotseq 1.5[\mathrm{eV}]$$

(c)
単位面積あたりのエネルギー E 以下の状態数を $n(E)$ とおくと、状態密度 $D(E)$ は

$$D(E)=\frac{\mathrm{d}n(E)}{\mathrm{d}E}$$

である。$E=\dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$ とすれば $k=\sqrt{\dfrac{2mE}{\hbar^2}}$ であり、これを半径とする円を考えると

$$n(E)=2\cdot\frac{\pi k^2}{(2\pi)^2}=\frac{4\pi mE}{h^2}$$

$$D(E)=\frac{\mathrm{d}n(E)}{\mathrm{d}E}=\frac{4\pi m}{h^2}(=\mathrm{const.})$$

(d)
三次元でも (c) と同様に考えると

$$n(E)=2\cdot\frac{4\pi}{3}\left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{3/2}\cdot\frac{1}{(2\pi)^3}=n\left(\frac{E}{E_F}\right)^{3/2}\quad\left(E_F=\frac{\hbar^2k_F^2}{2m},\ k_F=\sqrt[3]{3\pi^2 n}\right)$$

$$D(E)=\frac{\mathrm{d}n(E)}{\mathrm{d}E}=\frac{3n}{2E_F}\left(\frac{E}{E_F}\right)^{1/2}$$

絶対零度では $f(\epsilon)=1\ (\epsilon\leq E)$ なので

$$E=\int_0^\infty \epsilon f(\epsilon)D(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon=\frac{3}{5}nE_F$$

4.
(a)$\kappa=\dfrac{1}{3}Cv^2\tau$（導出は教科書参照）
(b)$R_{\mathrm{H}}=-\dfrac{1}{ne}$（導出は教科書参照）
(c)S の定義は $E_x=S\dfrac{\partial T}{\partial x}$ である。温度勾配による電子の平均速度 v_Q と電場による電子の平均速度 v_E の和が 0 であることより考える。
一次元で考えると、x の点の温度勾配による電子の速度は、$x-v_x\tau$ の点の電子の速さと $x+v_x\tau$ の点の電子の速さの差で表せる（前者は正方向を、後者は負方向を向いていると考える）。

$$v_Q=1/2[v_x(x-v\tau)-v_x(x+v\tau)]\simeq -v_x\tau\frac{\partial v_x}{\partial x}=-\tau\frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}v_x^2)=-\frac{\tau}{6}\frac{\partial}{\partial x}v^2=-\frac{\tau}{6}\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}T}\frac{\partial T}{\partial x}$$

一方

$$v_E = -\frac{e\tau}{m}E_x$$

である。以上を $v_Q + v_E = 0$ に代入すると

$$E_x = -\frac{1}{3e}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{mv^2}{2}\right)\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{C_V}{3en}\frac{\partial T}{\partial x}$$

を得る。

(d)v はフェルミ面上で一定なので

$$\sigma = \frac{1}{4\pi^3}\frac{e^2\tau}{\hbar}\frac{1}{3}v\int \mathrm{d}S_F = \frac{1}{4\pi^3}\frac{e^2\tau}{\hbar}4\pi k_F^2 = \frac{e^2\tau v}{3\pi\hbar}\sqrt[3]{9\pi n^2}$$

5.

$$C = \frac{\partial U}{\partial T} = \int_0^\infty ED(E)\frac{\partial f}{\partial T}\mathrm{d}E$$
$$0 = \frac{\partial N}{\partial T} = \int_0^\infty D(E)\frac{\partial f}{\partial T}\mathrm{d}E$$

第二式に E_F をかけて第一式から辺々引くと

$$C = \int_0^\infty (E - E_F)D(E)\frac{\partial f}{\partial T}\mathrm{d}E$$

$\dfrac{\partial f}{\partial T}$ が大きい値を持つのは E が E_F 付近のときであるので、この範囲のみ考えて $D(E) = D(E_F)$ の一定値とすれば

$$C \simeq D(E_F)\int_0^\infty (E - E_F)\frac{\partial f}{\partial T}\mathrm{d}E$$
$$\frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial T} = \frac{1}{k_BT^2}\frac{(E-E_F)\exp[\beta(E-E_F)]}{\{\exp[\beta(E-E_F)]+1\}^2}$$
$$C = D(E_F)\frac{1}{k_BT^2}\int_0^\infty \mathrm{d}E\frac{(E-E_F)^2\exp[\beta(E-E_F)]}{\{\exp[\beta(E-E_F)]+1\}^2}$$

$x = \beta(E - E_F)$ とおくと

$$C = D(E_F)k_B^2T\int_{-\beta E_F}^\infty \mathrm{d}x\frac{x^2\exp x}{\{\exp x + 1\}^2} \simeq D(E_F)k_B^2T\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x\frac{x^2\exp x}{\{\exp x + 1\}^2} = 2D(E_F)k_B^2T\int_0^\infty \mathrm{d}x\frac{x^2\exp x}{\{\exp x + 1\}^2}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2e^x}{(e^x+1)^2}\mathrm{d}x &= \int_0^\infty x^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{-1}{e^x+1}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-x^2\frac{1}{e^x+1}\right]_0^\infty + 2\int_0^\infty \frac{x}{e^x+1}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\infty \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^\infty x\sum_{n=0}^\infty (-1)^n e^{-(n+1)x}\mathrm{d}x \\
&= 2\sum_{n=0}^\infty (-1)^n\frac{1}{(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}
\end{aligned}$$

を代入して

$$C = \frac{\pi}{3} k_B^2 T D(E_F), \quad \gamma = \frac{\pi}{3} k_B^2 D(E_F)$$

6.

(a)

$$\begin{aligned} M\frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} &= -C_1(u_n - v_n) - C_2(u_n - v_{n-1}) \\ M\frac{\mathrm{d}^2 v_n}{\mathrm{d}t^2} &= -C_1(v_n - u_n) - C_2(v_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 \exp[i(\omega\tau - kan)] \\ v_n &= v_0 \exp[i(\omega\tau - kan)] \end{aligned}$$

の形の解を探す。(a) の方程式に代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} M\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1 + C_2 \exp(ika) \\ C_1 + C_2 \exp(-ika) & M\omega^2 - C_1 - C_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = 0$$

これが自明でない解を持つ条件は

$$\begin{vmatrix} M\omega^2 - C_1 - C_2 & C_1 + C_2 \exp(ika) \\ C_1 + C_2 \exp(-ika) & M\omega^2 - C_1 - C_2 \end{vmatrix} = 0$$

(c)(b) を解いて

$$\omega^2 = \frac{C_1 + C_2 \pm \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + 2C_1C_2 \cos ka}}{M}$$