解析数理工学

杉原正顯教員

2008/07/24

1. $q_1, q_2, \cdots$ を $[0,1]$ 内の有理数を並べたものとする．このとき, 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\epsilon}|x-q_n|} (\epsilon > 0)$$

は, $[0,1]$ 上ほとんどすべての x について収束する, すなわち,

$$D = \left\{ x \in [0,1] \middle| \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\epsilon}|x-q_n|} = +\infty \right\}$$

とおくとき, $m(D) = 0$ である, このことを以下の指示に従って証明せよ．$m(\cdot)$ は Lebesgue 測度である．

(a) $K = 1, 2, \cdots$ に対して, 区間列 $\{I_n^K\}_{N=1}^{\infty}$ を

$$I_n^K = \left(q_n - \frac{1}{Kn^{1+\epsilon/2}}, q_n + \frac{1}{Kn^{1+\epsilon/2}} \right) \cap [0,1],\ n = 1, 2, \cdots$$

と定義し, さらに

$$D^K \equiv \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n^K$$

とおく．このとき, 任意の K に対して, $D \subset D^K$ が成り立つことを示せ．[*1]

(b)

$$D^{\infty} \equiv \bigcap_{K=1}^{\infty} D^K$$

とおくとき, $m(D^{\infty}) = 0$ を示し, $m(D) = 0$ を示せ.

2. 実数 s に対して,

$$I_C(s) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(2sx) dx,\ I_S(s) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(2sx) dx$$

とおく．

(a) $dI_C(s)/ds$ を計算し, この導関数を $I_C(s)$ を用いて表せ．さらに, この関係式（微分方程式）から, $I_C(s)$ を求めよ．ただし,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

は既知とする.

[*1] ヒント：$[0,1] - D^K \subset [0,1] - D$ を示せ.

(b) $I_S(s)$ に関して, 前問と同様のことを行い, $I_S(s)$ を求めよ. ただし, $I_S(s)$ は初等関数では表せないので, その表現に

$$\mathrm{Erf}\ s = \int_0^s e^{t^2} dt$$

を用いてよい.

3. $A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 実行列とし, $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への線形作用素 T_A を以下のように定義する.

$$\begin{array}{cccc} T_A: & \mathbf{R}^n & \to & \mathbf{R}^m \\ & \cup & & \cup \\ & \boldsymbol{x} & \to & A\boldsymbol{x} \end{array}$$

T_A の作用素ノルム $\|T_A\|_\infty$ は

$$\|T_A\|_\infty = \sup_{\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_\infty}{\|\boldsymbol{x}\|_\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

で与えられることを示せ. [*2]

[*2] ヒント：まず, $\forall \boldsymbol{x} \neq \mathbf{0};\ \|A\boldsymbol{x}\|_\infty \leq (\max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|)\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ を示し, 次に, ある $\boldsymbol{x}$ での等号成立を示す.