解析数理工学

2002/7/23

1. 任意の自然数 N と自然数の全体 $\mathbf{N}$ の上で定義きれた正の実数の値をとる任意の関数 φ が与えられたとする．実数の全体 $\mathbf{R}$ のボレル集合の全体を $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ とするとき, $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ の上で定義された集合関数 $\mu : \mathcal{B}(\mathbf{R}) \longrightarrow [0,\infty)$ を,
$$\mu(A) \equiv \text{集合}\ \{n \in \{1,2,\cdots,N\} \log(\varphi(n)) \in A\}\ \text{の個数}\ (A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$$
で定義する．このとき, 次の問いに答えよ．
(a) 集合関数 μ は測度である．
(b) $\mathbf{R}$ の上で定義された実数の値をとる任意の $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ‐ 可測な関数 f は測度 μ に関して可積分である．
(c) さらに, (b) に述べた関数 f の測度 μ に関する Lebesgue 積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(x)d\mu(x)$ は次の様に表現される．
$$\int_{\mathbf{R}} f(x)d\mu(x) = \sum_{n=1}^{N} f(\log(\varphi(n)))$$

2. 任意の有界な $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ ‐ 可測な関数 $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ に対し, 関数 $u : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を
$$u(x) \equiv \int_{\mathbf{R}} f(x-y)e^{-y^2}dy$$
で定義する．このとき, 関数 u は微分可能であることを示せ．

3. 複素ヒルベルト空間 $L^2(|0,1);\mathbf{C})$ において, 各自然数 n に対し, 関数 $r_n : [0,1) \longrightarrow \{1,-1\}$ を次のように定義する；$x \in \{0,1)$ の 2 進小数展開を
$$x = 0.x_1x_2x_3\cdots(x_m \in \{0,1\}, m = 1,2,3,\cdots)$$
とするとき,
$$r_n(x) \equiv \begin{cases} 1 & \text{for } x_n = 0 \\ -1 & \text{for } x_n = 1 \end{cases}$$
ただし, 例えば二つの表現 $0.0101111111\cdots = 0.0110000000\cdots$ を持つ実数に対しては, 後半の表現を採用する．このとき, 次の問いに答えよ．
(a) $\{r_n; n \in \mathbf{N}\}$ は正規直交系である．
(b) $\{r_n; n \in \mathbf{N}\}$ は完全正規直交系ではない．