数学 2D

張紹良教員

2001/07/18

- 書物・ノートの持ち込み不可.
- 解答用紙 4 枚, 計算用紙 1 枚.

1. (複素関数)
   (a) 任意の整数 n に対して, $[\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})]^n + [\frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})]^n$ を計算せよ.
   (b) 複素数 z と実数 θ が $z+z^{-1}=2\cos\theta$ を満たすとき, $z^n+z^{-n}=2\cos n\theta$ が成立することを示せ.
   (c) 関数 $f(z)$ は領域 D で正則とする. もしその共役関数 $\overline{f(z)}$ も D で正則ならば, $f(z)$ が D で定数となることを証明せよ.
   (d) 留数の定理を利用して, $-1<b<1$ のときの定積分 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^b}{1+x^2}dx$ の値を求めよ.

   (ヒント) 図 1 に示した積分路において, 複素関数 $\dfrac{z^b}{1+z^2}$ の複素積分を考える. ただし, $z^b = \exp(b\log(z)), \log(z) = \log(|z|) + i\arg(z) + 2mi\pi(-\pi < \arg(z) \le \pi, m = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$.

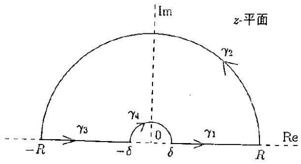

図 1

2. (Fourier 解析)
   (a) 関数 $f(x)=|x|(-\pi\le x\le\pi)$ の Fourier 級数を求めよ.
   (b) 前問の結果を利用して, $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$ を証明せよ.
   (c) Laplace 変換を利用して, 次の微分方程式の初期値問題の解を求めよ.

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=2,\ y(0)=1,\ \frac{dy}{dt}(0)=0$$

   ただし, $\mathcal{L}[\cos\omega t]=\dfrac{s}{s^2+\omega^2}$.

3. (偏微分方程式)

(a) 変数分離法を利用して, 次の初期値・境界値問題を解け.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0,\ u(x,0) = \sin^2 \pi x,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$