

数学 1D

張紹良教員

2004/3/2

1. (常微分方程式)

- (a) $y' + y \cos x = \sin(2x)$ の一般解を求めよ.
- (b) 積分因子を求めて $2xydx + (y^2 - x^2)dy = 0$ の一般解を求めよ.
- (c) $y''' - 3y' + 2y = 0$ の一般解を求めよ.
- (d) 連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

を, 初期値 $x(1) = 1, y(1) = 4, z(1) = -7$ の下に解け.

2. (ベクトル解析)

- (a) $\phi(x, y, z)$ をスカラー場とする. 恒等式 $\text{rot grad}\phi = \mathbf{0}$ を証明せよ.
- (b) Gram-Schmidt の直交化法を述べよ. これを用いてベクトル $\mathbf{a} = (1, 2, 3)^T, \mathbf{b} = (1, 1, 1)^T$ で張られた部分空間の正規直交基底を計算せよ.
- (c) ガウスの定理を述べよ. この定理を用いて次の積分を計算せよ.
ベクトル場 $\mathbf{f} = xz\mathbf{i} + 3xyz^2\mathbf{j} + 5zk$ とし, S を $2z^2 = x^2 + y^2, z = 0, z = 4$ で限られる閉曲面とする. \mathbf{n} を外向きの法線ベクトルとして, $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ とおく. この曲面 S に関して, $\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ.
- (d) ストークスの定理を述べよ. この定理を用いて次の積分を計算せよ.
ベクトル場 $\mathbf{f} = 4y\mathbf{i} + 5x\mathbf{j} + 3zk$ に対し, 半球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ に関して, $\iint_S \text{rot}\mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}$ を求めよ.

3. (変分法)

- (a) 汎関数

$$J[u(x, y, x)] = \iiint_V dx dy dz (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$$

に対する Euler 方程式を求めよ. ただし, 領域 V の境界 ∂V では $u(x, y, x) = \text{一定}$ とする.