光学解答

Rapid

平成 21 年 2 月 9 日

2006

3

ビームウェストを持つとはすなわち、q が純虚数になることを意味する。反射直前の q を q_1 とおくと、球面ミラーに反射すると

$$q_2 = \frac{q_1}{-\frac{2}{r}q_1 + 1}$$

そこから l だけ進むと

$$q_3 = \frac{q_2 + l}{1}$$

そして、q_3 が純虚数になる l をさがしてやればいい。すると

$$q_3 = \frac{q_1}{-\frac{2}{r}q_1 + 1} + l$$

4

ノート参照だが、この系全体の ABCD 行列をかんがえ

$$(\frac{(A+D)}{2})^2 < 1$$

ならよい。計算すると球面で反射するときのＡＢＣＤ行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{r}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

l 進むときのは

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

これをかけて、この光学系のＡＢＣＤ行列をもとめると

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{2l}{r_1} - \frac{2l}{r_2}(1 - \frac{2l}{R_1}) - \frac{2l}{R_1} & 2l - \frac{2l^2}{R_2} \\ -\frac{2}{R_2}(1 - \frac{2l}{R_1}) -_{1} \frac{2}{R_1} & -\frac{2}{R_2}l + 1 \end{pmatrix}$$

となり

$$-2 < 2 - \frac{4l}{r_1} - \frac{4l}{r_2} + \frac{4l^2}{R_1 R_2} < 2$$

$$0 < (1 - \frac{l}{R_1})(1 - \frac{l}{R_2}) < 1$$

6

フラウンホーファー型だとおもってあげて計算いたします。そうするとこういう回折の公式があります。ϵ_A とは偏光方向です。R はスリットからスクリーンまでの距離。スリットの中心を原点だとおもってスクリーンの座標を $(q\cos\alpha, q\sin\alpha, R)$ として、スリットの座標を $(\rho\cos\beta, \rho\sin\beta, 0)$ であらわします。で、積分をするとき、$\beta - \alpha = \phi$ とおもってあげて

$$\frac{\epsilon_A \exp(i(\omega t - kR))}{R} \int_{\frac{a}{2}}^{a} \int_0^{2\pi} \exp(i(\frac{k\rho q}{R} cos\phi))\rho d\rho d\phi$$

ここでベッセル関数の性質をつかってあげます

$$J_0(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(iu\cos(v))dv$$

と、過去問にのってる

$$uJ_1(u) = \int_0^u \acute{u} J_0(\acute{u}) d\acute{u}$$

を順番に使うと

$$\frac{\epsilon_A \exp(i(\omega t - kR))}{R} 2\pi \int_{\frac{a}{2}}^{a} J_0(\frac{k\rho q}{R})\rho d\rho$$

$$\frac{\epsilon_A \exp(i(\omega t - kR))}{R} \frac{R^2}{k^2 q^2} (\frac{kaq}{R} J_1(\frac{kaq}{R}) - \frac{kaq}{2R} J_1(\frac{kaq}{2R}))$$

7

透過した光の強度が 1 になるようにする。なぜか反射する光の強度をもとめると 2 になるが‥。だれかこの理由がわかったら教えてください‥
エネルギー反射率を R とおきます $R = 0.99$ です。ということはエネルギー透過率が 1-R。これらを振幅で考え直すと、振幅反射率は $\sqrt{R}$, 透過率が $\sqrt{(1-R)}$ そして、L すすむことでの位相の変化を ϕ とおきます。すると

$$(\sqrt{1-R})^2\phi + (\sqrt{1-R})^2\phi(\sqrt{R}^2\phi^2) + (\sqrt{1-R})^2\phi(\sqrt{R}^2\phi^2)^2 + (\sqrt{1-R})^2\phi(\sqrt{R}^2\phi^2)^3 + \ldots$$

第一項目から順番にそのまま透過したやつ、左のミラーを透過、右のミラーで反射、左のミラーで反射、右のミラーを透過したやつ、というふうになっています。

$$\frac{1 - R\phi}{1 - R\phi^2}$$

これが 1 か-1 となる r と ϕ の関係を探す。(振幅が１から-１ならエネルギーは全部透過してることになる）$\phi = 1, -1$ より、L が結局波長の半整数倍ならＯＫ

8

L 進むことによる位相変化を ϕ, 一度物質を透過することで減衰する振幅の大きさを q として, 反射波の大きさは

$$\sqrt{R}+(\sqrt{1-R})^2\phi^2q^2+(\sqrt{1-R})^2(\phi^2q^2)^2\sqrt{R}+(\sqrt{1-R})^2\sqrt{R}(\phi^2q^2)^3\sqrt{R}^2+\ldots$$

$$=\sqrt{R}+\frac{(1-R)\phi^2q^2}{1-\phi^2q^2\sqrt{R}}$$

これが 0 になるようなときは

$$(\phi q)^2=\frac{\sqrt{R}}{2R-1}$$

ϕ は位相変化の項なので

$$q^2=\frac{\sqrt{R}}{2R-1}$$

吸収量とはエネルギーの減推量、つまり振幅の減衰の 2 乗なので

$$q^2\frac{2R-1-\sqrt{R}}{2R-1}$$

これが答え。

9

1.

$$rotE+\frac{\partial}{\partial t}B=0$$

より

$$B=e_y\frac{\tilde{n}}{c}E_0\exp(i\omega(\frac{\tilde{n}}{c}z-t))$$

$$H=\frac{\tilde{n}}{c\mu_0}\exp(i\omega(\frac{\tilde{n}}{c}z-t))$$

2.

$$\bar{S}=\frac{1}{2}(E^*\times H)$$

$$\frac{n}{2\mu_0c}E_0^2\exp(-2\omega\frac{k}{c}z)$$

3. 微分するだけなんて省略www

10

屈折の原理からがんばってだしてください。省略ー@あ、(b) については入射光と屈折光が対象になるとおもえばうまくいきますする。

11

(a) ドルーデモデルとは

$$m\frac{dx^2}{dt^2} = -m\gamma x - eE\exp(-i\omega t)$$

$$-m\omega^2 x_0 \exp(-i\omega t) = im\omega\gamma x_0 \exp(-i\omega t) - eE\exp(-i\omega t)$$

$$x_0 = -\frac{eE}{m\omega^2 - im\gamma\omega}$$

$$p = -eNx$$

より

$$\epsilon E = \epsilon_0 E + P$$

$$\frac{e^2NE}{m\omega^2 - im\gamma\omega} = (\epsilon - \epsilon_0)E$$

計算していくと

$$\epsilon_1 = \frac{-\omega^2 - \gamma^2 + \omega_p^2}{\omega^2 + \gamma^2}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\omega_p^2\gamma}{\omega(\omega^2 + \gamma^2)}$$

(b) 計算すればでますww岩澤君が計算してくれましたー。

$$\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega}\frac{\omega - i\gamma}{\omega^2 + \gamma^2}$$

で、この場合 $\omega << \gamma << \omega_p$ より

$$\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2}$$

$$\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\gamma^2} + i\frac{\omega_p^2}{\omega\gamma}$$

$$\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0} \simeq \frac{-\omega_p^2}{\gamma^2} + i\frac{\omega_p^2}{\omega\gamma} = \frac{\omega_p^2}{\gamma^2}(-1 + i\frac{\gamma}{\omega})$$

$$(\frac{\tilde{\epsilon}}{\epsilon_0})^{\frac{1}{2}} = \frac{\omega_p}{\gamma}\sqrt{-1 + i\frac{\gamma}{\omega}}$$

$$\simeq \frac{\omega_p}{\gamma}\frac{\gamma}{\omega}(\frac{1}{2} + \frac{i}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega\gamma}}(1 + i)$$

$$R = \left|\frac{\frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega\gamma}}(1+i) - 1}{\frac{\omega_p}{\sqrt{2\omega\gamma}}(1+i) + 1}\right|^2$$

$$= \frac{(\omega_p - \sqrt{2\omega\gamma})^2 + \omega_p^2}{(\omega_p + \sqrt{2\omega\gamma})^2 + \omega_p^2}$$

$$= 1 - \frac{4\omega_p\sqrt{2\omega\gamma}}{(\omega_p + \sqrt{2\omega\gamma})^2 + \omega_p^2}$$

$$= 1 - \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\omega_p}\sqrt{\omega}$$

$$A = \frac{2\sqrt{2\gamma}}{\omega_p}$$

(c) これはかなりきついです。調べるの結構大変です。ですから、仕方ないので教科書の図を覚えて書き出すようにするといいと思います。

2007

3

光学系が安定な条件は ABCD 行列が

$$(\frac{A+D}{2})^2 < 1$$

でしたレンズのＡＢＣＤ行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$$

l 進む様なＡＢＣＤ行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

光学系全体では

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ -\frac{1}{f} & -\frac{l}{f} + 1 \end{pmatrix}$$

安定条件は

$$1 > 1 - \frac{l}{2f} > -1$$

4

セルフコンシステント条件より、レンズのところでの q を考えて

$$q = \frac{q + l}{-\frac{q}{f} - \frac{l}{f} + 1}$$

そこから x 進んだ q を q_2 とすると

$$q = -l \pm \sqrt{l^2 - lf}$$

$$q_2 = q + x = x - l \pm \sqrt{l^2 - lf}$$

ビームウェストではqは純虚数なので $x = \frac{l}{2}$ でビームウェスト
あとは

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - \frac{i\lambda}{\pi n \omega^2}$$

にいれてウェストサイズを計算するだけです。レンズからxすすんだときの ω を計算するだけです。

参考文献