数学 1D

藤堂眞治教員

2007/03/06

- 参考書・ノート類の持ち込み不可.
- 解答用紙 3 枚, 計算用紙 1 枚. 原則として各問につき 1 枚の解答用紙を用いること. 各解答用紙に学籍番号・氏名・問題番号を明記せよ.
- 問題の設定が不十分または不適当と思う場合は, その旨を明記し合理的な設定をした上で解答せよ.

1. 微分方程式の一般解を求めよ.
   (a) $xy' = x - y$
   (b) $\dot{\boldsymbol{X}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \boldsymbol{X}$
   (c) $2xy + (y^2 - x^2)y' = 0$
   (d) $y'' + 5y' + 4y = x^2 e^{2x}$
2. 次の微分方程式
$$(1-x^2)y'' - 2xy + 6y = 0$$
   について,
   (a) 全ての特異点を求めよ. それらが確定特異点であることを示せ.
   (b) x の奇数次のみを含む級数解と偶数次のみを含む級数解を求めよ.

3. (a) ベクトル場 $\boldsymbol{A} = (-y, x+y, z)$ および曲線 $C : \boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t, \sin 2t, at)$ を考える. (a は定数).
      i. $\mathrm{div}\boldsymbol{A}, \mathrm{rot}\boldsymbol{A}$ を求めよ.
      ii. 曲線 C の接線単位ベクトル, 主法線単位ベクトルを計算せよ.
      iii. $a = 0$ の時, C は閉曲線となる. このとき以下の積分を計算せよ.
         A. $\oint_C dt$
         B. $\oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$
   (b) 球座標 (r, θ, ψ) について
      i. スカラ場 f の勾配 ∇f, ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の発散 $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ の表式を求めよ.
      ii. 位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ を極座標で表し, $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 3$ を示せ.
      iii. ベクトル場 $\boldsymbol{F}$ が $\boldsymbol{F} = r^n \boldsymbol{r}$ で与えられるとする. $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ の値を求めよ.
      iv. $\boldsymbol{F}$ は $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ を満たす, すなわち $\boldsymbol{F} = -\nabla\phi$ となるスカラポテンシャル ϕ が存在する. ψ を求めよ.

4. (a) ラグランジュの未定乗数法を用いて, 曲線 $2x^2 - 3xy + 2y^2 = 1$ 上の点で, 原点からの距離が最大, 最小となるものを求めよ.

（b）積分汎関数

$$J[y(x)] = \int dx (y_x^2 - \lambda y^2)$$

に対するオイラー方程式を導け．さらに，境界条件 $y(0) = y(1) = 0$ を満たす解とその固有値 λ を求めよ．