解析数理工学

山本教員

1997/07/01

1. 下記 (a)〜(g) のの各文について, 誤りがなければ「誤りなし」と書き, 誤りが含まれていれば, 「誤り箇所」を示すと共に, その「誤っている理由」を説明せよ.

   (a) 区間 $[0,1]$ 上で定義された集合の集合族を考える. Jordan 測度で長さを確定できる Jordan 可測な集合の集合族を $\mathcal{F}_J$ とし, Lebesgue 測度で長さを確定できる Lebesgure 可測な集合の集合族を $\mathcal{F}_L$ とする. このとき, $\mathcal{F}_J$ は有限加法族となり, $\mathcal{F}$ は σ-加法族 (完全加法族) となる. しかし, 有限区間の $[0,1]$ ではなく, 無限区間 $(-\infty,\infty)$ で考える場合は, 有限加法族も σ-加法族に一致する.

   (b) 測度がゼロである集合を零集合という. 実数の閉区間 $[0,1]$ 上で Lebesgue 測度を用いる場合, その中に含まれる有理数の集合は零集合となる. 閉区間 $[0,1]$ から有理数の集合を除いた残り (つまり無理数) の集合の Lebesgue 測度は 1 である. したがって, 閉区間 $[0,1]$ 内の実数と一対一に対応が付く連続体濃度を持つ集合の Lebesgue 測度は零集合とはなりえない.

   (c) Lebesgue 積分は, その積分の名前からも分かるように, 実数のような連続的な要素からなる集合上に対して定義されているものであり, 離散的な集合に対しては Lebesgue 積分は意味をなさないものである.

   (d) 関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束するものとする (つまり, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とする). Riemann 積分では, $f_n(x)$ が可積分でも $f(x)$ が可積分とは限らないが, Lebesgue 積分では, $f_n(x)$ が可積分でかつ $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束すれば, 常に $f(x)$ も可積分となる.

   (e) 関数列 $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束するものとする (つまり, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ とする). 任意の n と任意の $x(-\infty<x<\infty)$ で $|f_n(x)|\le M<\infty$ が成立するとき, Lebesgue 測度に基づく Lebesgue 積分では, 常に次の等式が成立する.

   $$\lim_{n\to\infty}\int_{(-\infty,\infty)} f_n(x)dx=\int_{(-\infty,\infty)} f(x)dx$$

   (f) Fubini の定理より, Lebesgue 積分 $\int_{X\times Y} f(x,y)d\mu\otimes\nu(xy)$ は $\int_X d\mu(x)\int_Y f(x,y)d\nu(y)$ または $\int_X d\nu(x)\int_Y f(x,y)d\mu(y)$ のどちらかが有限の値になれば, 可積分となる.

   (g) $(-\infty,\infty)$ 上の測度 μ が, Lebesgue 測度に対して絶対連続のとき, 任意の集合 $A\subset(-\infty,\infty)$ に対して, $\mu(A)=\int_A g(x)dx$ を満たす可積分な関数 $g(x)$ が, a.e. の意味で一意に定まる.

2. Lebesgue 測度に基づく次の Lebesgue 積分値を求めよ.

- 値が確定しないときは, 「値が確定しない」と書き, その理由を説明せよ.
- 式を変形する場合は, 自明なとき以外は, そのような変形ができる理由を必ず明記すること.

(a)

$$\int_{[0,1]} f(x)dx, f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ の 3 進数表示に 1 が全く含まれない} \\ 1-x & x \text{ の 3 進数表示に 1 が少なくとも一つは含まれる} \end{cases}$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)dx, f_n(x) = \begin{cases} n & \frac{1}{n^3} \le x \le \frac{1}{n^2} \\ \frac{1}{n} & \text{それ以外} \end{cases}$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{[0,1]} \frac{(x-0.5)^n}{n!} dx$$

(d)

$$\frac{d}{dx} \int_{[1,2]} x^3 \ln(xy) dx, 0 < x < \infty$$

(e)

$$\int_{(-\infty,\infty)} g(x,y)dx, -\infty < y < \infty \text{ で } g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(f)

$$\int_{(-\infty,\infty)} \int_{(-\infty,\infty)} g(x,y) dxdy, g(x,y) \text{ は前問で定義した関数}$$