

数値線形計算

2002/07/18

1.

$$-0.001x_1 + 6x_2 = 6.001$$

$$3x_1 + 6x_2 = 3$$

について、精度を 10 進 4 桁とし、ガウスの消去法により解を求めよ。ピボット選択を行う場合と行わない場合の 2 通りを考えよ。

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

を LU 分解せよ。ただし、 L は対角成分が 1 である下三角行列、 U は上三角行列である。

3. Sylvester の慣性律と LU 分解を用いて、対称行列

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

の固有値を、誤差 1 以下で求めよ。(Strum の定理を用いる方法でもよい。)

4. $k(x), f(x)$ が与えられているとし、 $u(x)$ は次の方程式を満たすとする。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x} \right) + f(x) = 0 \text{ for } x \in (0, 1), k(1) \frac{\partial u}{\partial x}(1) = q, u(0) = g$$

この方程式の近似解を $u(x) = \sum_{j=0}^N c_j \psi_j(x)$ の形で求めたい。ただし、

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 1 - N|x - \frac{j}{N}| & x \in [\frac{j-1}{N}, \frac{j+1}{N}] \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

である。 $\{c_j\}$ を求めるための手順を示し、 $k(x) = k(\text{一定}), f(x) = x^2(1-x)$ の場合に、 $\{c_j\}$ が満たすべき方程式を具体的に書き下せ。