数学 2D

今田正俊教員

2006/07/19

解答は大問毎にそれぞれ別の解答用紙に記入し, 冒頭に問題番号を明記せよ. また各解答用紙 1 枚ごと, 最上部に学籍番号, 氏名を明記せよ. 必要であれば解答用紙の裏面を利用しても, また 1 問につき 2 枚以上の解答用紙を用いてもよい.

1. (a) 次の複素数 z に対する関数のすべての極と, その極における留数を求めよ. ただし a は実定数である.
   i. $\dfrac{1}{z-1}$
   ii. $\dfrac{1}{z^2+z+1}$
   iii. $\tan z$
   iv. $\dfrac{1}{e^{az}-1}$
   v. $\dfrac{1}{e^{az}+1}$

   (b) 前問の結果を用いて, 複素積分により

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi^2(2n+1)^2}{b^2}+c^2}$$

   を求めよ. ただし n は整数, b, c は正定数である. 導出過程も記せ.

2. 以下の積分を複素積分を用いて求めよ. 積分路など, 導出過程も記せ. ただし a, b はともに正定数とする.
   (a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+a^4}$
   (b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x} dx$
   (c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x} dx (0 < a < 1)$
   (d) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos bx}{x^2(x^2+a^2)} dx$

3. (a) フーリエ変換を

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

と定義する．以下の $f(x)$ に対して，フーリエ変換 $\tilde{f}(k)$ を求めよ．ただし a は正定数とする．

i. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + a^2}$

ii. $f(x) = e^{-ax^2}$

iii. $f(x) = 1$

(b) $f(x)$ を $f(x) = \displaystyle\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilx}$ のようにフーリエ展開する．区間 $[0, 2\pi]$ で $f(x) = x$ とするとき，c_l を求めよ．

(c) 1 次元座標上の点 x，時刻 t における粒子の分布関数 $f(x,t)$ に対する拡散方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

の主要解 G を $(\dfrac{\partial}{\partial t} - D\dfrac{\partial^2}{\partial x^2})G(x,t) = \delta(x)\delta(t)$ で定義する．(ただし D は正定数で $\delta(x)$ は x のデルタ関数)

i. このとき G のフーリエ変換 $\tilde{G}(k,\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dt G(x,t) e^{-i(kx-\omega t)}$ を求めよ．

ii. 前問の結果からフーリエ逆変換により $G(x,t)$ を求めよ．

iii. $G(x,t)$ は物理的に何を表しているのか論ぜよ．